

O. C. Krause

Frankfurt ^{a/m} 1976

DIE BEHANDLUNG VON TRANSFERREAKTIONEN

IM FORMALISMUS DER GEKOPPELTEN KANÄLE

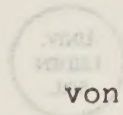
Inaugural-Dissertation

zur Erlangung

des Doktorgrades der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Physik der

Johann Wolfgang Goethe Universität Frankfurt/M



Olaf Christiah Krause aus Hersbruck

Frankfurt/M

1976

THE UNIVERSITY OF LEIDEN

LIBRARY

UNIVERSITY OF LEIDEN

LIBRARY

UNIVERSITY OF LEIDEN

LIBRARY

UNIVERSITY OF LEIDEN



UNIVERSITY OF LEIDEN

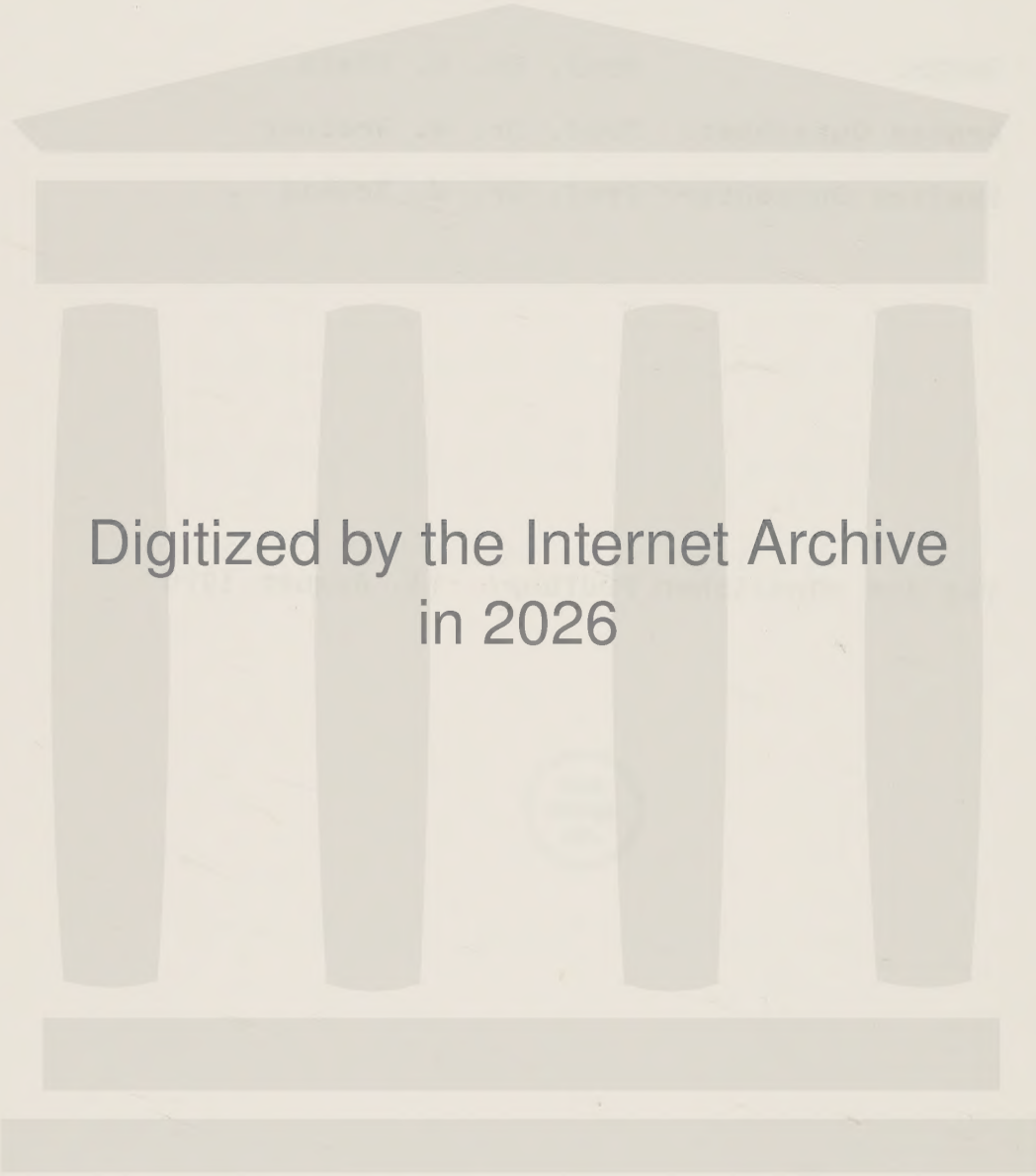
LIBRARY

UNIV.

Gedruckt mit Genehmigung des Fachbereichs Physik
der Johann Wolfgang Goethe Universität Frankfurt

Dekan: Prof. Dr. H. Klein
Erster Gutachter: Prof. Dr. W. Greiner
Zweiter Gutachter: Prof. Dr. W. Scheid

Tag der mündlichen Prüfung: 13. August 1976



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550826_0029

Abstract

The transfer reaction $^{16}\text{O} (^{16}\text{O} , ^{12}\text{C}) ^{20}\text{Ne}$ to the ground state band in ^{20}Ne is treated in the coupled channel formalism to study the influence of the transfer channels on the elastic channel. The solution is performed in a model which decomposes the ^{16}O - nuclei into a ^{12}C - core plus an α - particle and the ^{20}Ne into ^{12}C plus two α - particles with effective two - body forces acting between the clusters. Within this four - body problem symmetrisation and recoil effects are treated exactly. First results for the nonlocal interaction kernels are presented.

Inhaltsübersicht

I.	Einführung	1
II.	Der Formalismus	15
III.	Modellannahmen für das $^{16}\text{O} - ^{16}\text{O}$ - System	24
IV.	Die Winkelintegrationen	36
V.	Die gebundenen Cluster - Cluster - Relativ- funktionen	41
VI.	Die Cluster - Cluster - Potentiale im Konti- nuum	53
VII.	Die Radialintegration in den Integralker- nen (analytisch)	61
VIII.	Numerische Auswertung der Fourierkoeffi- zienten	65
IX.	Erste Ergebnisse	79
X.	Zusammenfassung	86
Anhang A1.	Ausführliche Formulierung der Inte- gralkerne	91
Anhang A2.	Umkopplung der Wellenfunktionen	103
Anhang A3.	Die Winkelintegration	110
Anhang A4.	Numerische Lösung gebundener Zustän- de	120

Anhang A5. Integrale über Produkte von Bes-	
selffunktionen	123
Referenzen	130
Verzeichnis der Abbildungen	137
Danksagung	141
Lebenslauf	142

I. Einführung

In den letzten 15 Jahren, seit der Verfügbarkeit der großen Beschleuniger, haben sich Schwerionenreaktionen zu einem wichtigen Hauptgebiet der Kernphysik entwickelt. Mit ihrer Hilfe ist es möglich, physikalische Prozesse zu untersuchen, die weder in der Niederenergie - Kernphysik noch bei der Nukleon - Kern - Streuung oder der α -Kern - Streuung beobachtbar sind. Der Bereich dieser neuen Phänomene reicht von so klassischen Effekten wie der Erzeugung sehr hoher Drehimpulszustände ¹⁾ im Compoundsystem ($I \geq 100\hbar$ sind keine Seltenheit) mit ihren physikalischen Konsequenzen über die Entstehung extrem starker elektromagnetischer Felder ²⁾ bei der Bildung von Molekülen im Vorbeiflug zweier schwerer Kerne und dem dabei auftretenden Zusammenbruch des Vakuums bis zu so spekulativen Zielen wie der Hoffnung, durch Wahl zweier geeigneter Reaktionspartner den See der Instabilität überspringen zu können und auf diese Weise superschwere Kerne mit $Z \approx 112$ oder gar $Z \approx 164$ zu erzeugen ³⁾. Um diesen Zielen näherzukommen, wurden in den letzten Jahren immer größere Beschleuniger gebaut; der Unilac - Beschleuniger der GSI in Darmstadt, der in diesem Jahr den Betrieb aufgenommen hat und wohl die derzeit beste Maschine dieser Art ist, wird sicher einen großen Teil der offenen Fragen beantworten helfen, aber auch neue aufwerfen.

Bei der Beschreibung sehr schwerer Streusysteme mit nicht zu hohen Energien, wo die de Broglie - Wellenlänge klein ist im Vergleich zum geringsten Kern - Kern - Abstand und

der Sommerfeld - Parameter $\eta = Z_1 Z_2 e^2 / \hbar v_{ion} \gtrsim 1000$ ist, hat man mit klassischen ⁴⁾ und halbklassischen ⁵⁾ Methoden recht gute Ergebnisse erzielt. Bei erheblich kleineren Werten von η wird eine quantenmechanische Behandlung der Streuung mit einer Partialwellenanalyse notwendig.

Wir wollen uns in dieser Arbeit mit dem Phänomen der quasimolekularen Zustände während des Streuprozesses befassen. Anlaß zu solchen Betrachtungen gaben erstmals Messungen von Bromley et al ⁶⁾ im Jahre 1960. Siehe hierzu Fig. (I.1)! In der elastischen Anregungsfunktion für das ^{16}O - ^{16}O - System zeigte sich eine der Grobstruktur aus der Potentialstreuung überlagerte feinere Struktur. Diese intermediäre Struktur hat eine Breite von ca. 0.3 MeV, was nach der Heisenberg'schen Unschärferelation einer Lebensdauer von ca. 10^{-21} s entspricht. Verschiedene Erklärungen sind in der Literatur abgehandelt ⁷⁾. Die Strukturen können als Fluktuationen, verursacht durch einen compound-elastischen Prozeß, interpretiert werden ⁸⁾, was jedoch weder eindeutig ⁹⁾ noch physikalisch besonders interessant ist. Andererseits können solche Strukturen entstehen, wenn während des Streuvorgangs Kernmoleküle gebildet werden. Wie Scheid et al ¹⁰⁾ gezeigt haben, führt die Kopplung von inelastischen Kanälen an den elastischen über den Doppelresonanzmechanismus, wie in Fig. (I.2) erläutert, zu den beobachteten intermediären Strukturen. Mit einfachen Worten ausgedrückt: Dort, wo inelastische Anregungen eines oder beider Kerne energetisch und drehimpulsmäßig be-

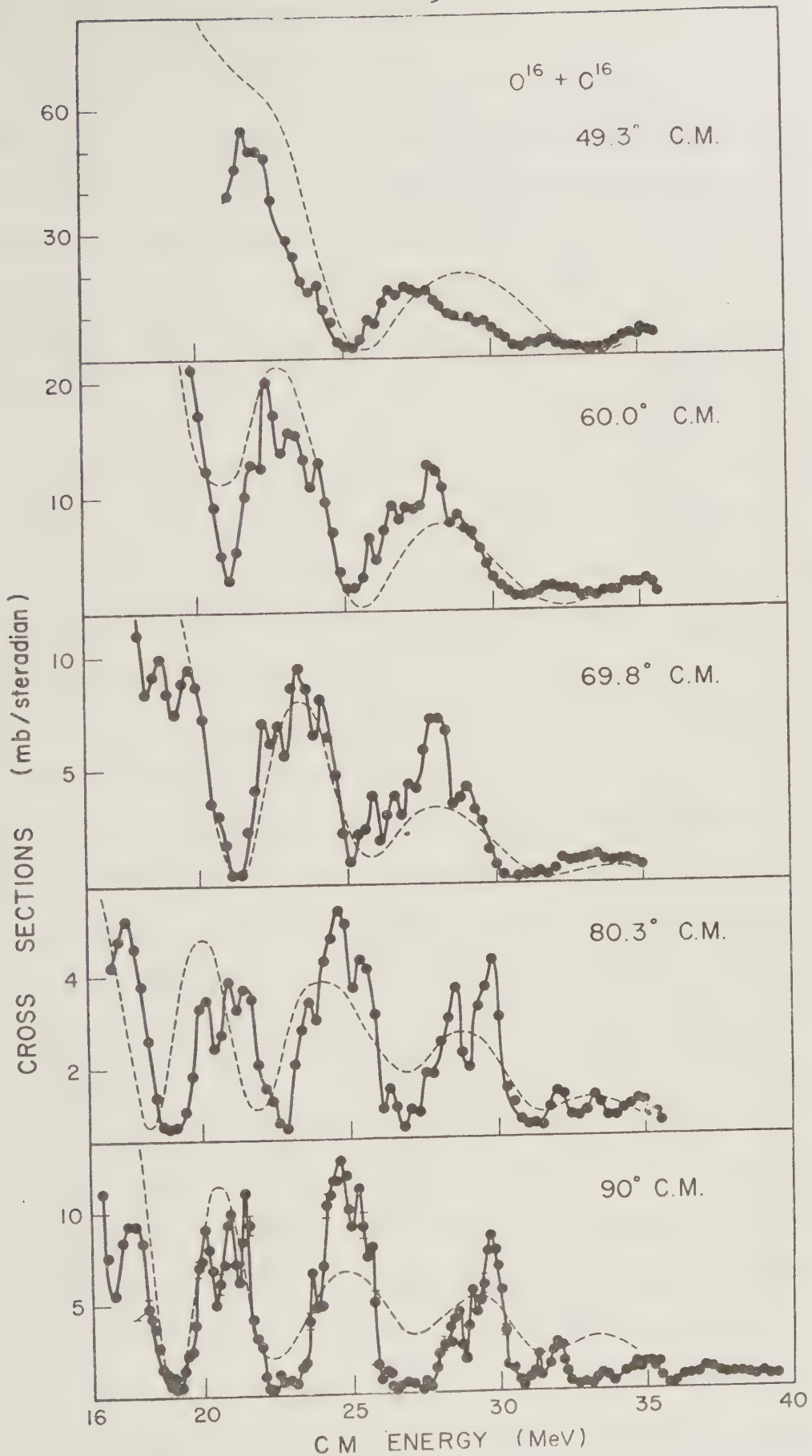


Fig. (I.1): $^{16}\text{O} - ^{16}\text{O}$ - Anregungsfunktion nach Ref.6)

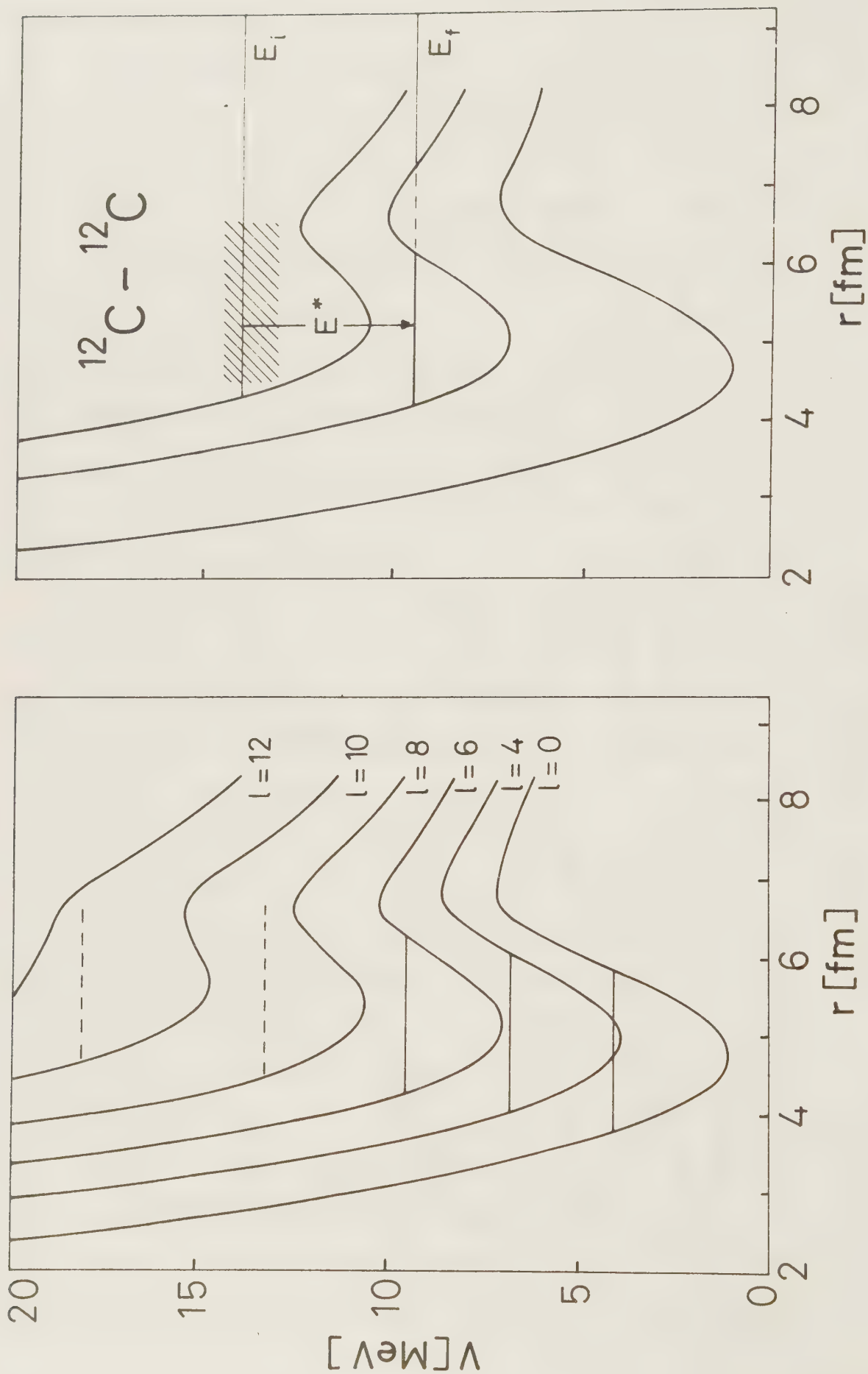


Fig. (I.2)

Erläuterung zum Doppelresonanzmechanismus nach Ref. 10)

günstigt sind, werden sie mit erhöhter Wahrscheinlichkeit eintreten. Auf diese Weise wird aus dem elastischen Kanal Fluß absorbiert, wir beobachten eine Absenkung des elastischen Wirkungsquerschnitts an dieser Stelle. Es liegt nun nahe, solch einen Mechanismus auf Transferkanäle zu erweitern.

In den letzten Jahren sind eine ganze Reihe von Reaktionskanälen des $^{16}\text{O} - ^{16}\text{O}$ - Systems genauer studiert worden (11,12). Die Messungen der Weidinger - Gruppe haben gezeigt, daß der α - Transfer zur Fragmentation ($^{20}\text{Ne} - ^{12}\text{C}$) der dominierende Transferkanal ist. Die Querschnitte für Ein- und Zweinukleonentransfer sowie 8-Nukleonentransfer zu $^8\text{Be} + ^{24}\text{Mg}$ sind mindestens eine Größenordnung kleiner. In Fig. (I.3) sehen wir die Anregungsfunktionen für α - Transfer zum Target und zum Projektil. Der Unterschied ist zum Teil aus der verschiedenen Kinematik erklärbar, der starke Untergrund am hochenergetischen Teil der Transferreaktion zum Projektil ist möglicherweise der Reaktion $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O} \rightarrow ^{32}\text{S} \rightarrow ^{20}\text{Ne} + 3\alpha$ zuzuschreiben. In Fig (I.4) bis (I.6) sehen wir die Daten von K.Erb aus Yale (13). Fig. (I.4) zeigt schematisch den Versuchsaufbau einer Koinzidenzmessung und die Koinzidenzrate mit Zuordnung der betreffenden angeregten Zustände in den Kernen. Wir sehen, daß der α - Transfer im wesentlichen auf sechs Kanäle verteilt ist. Fig. (I.5) zeigt Anregungsfunktionen, Fig. (I.6) Winkelverteilungen. Die relative Stärke der Transferkanäle kann man aus Tabelle (I.1) entnehmen,

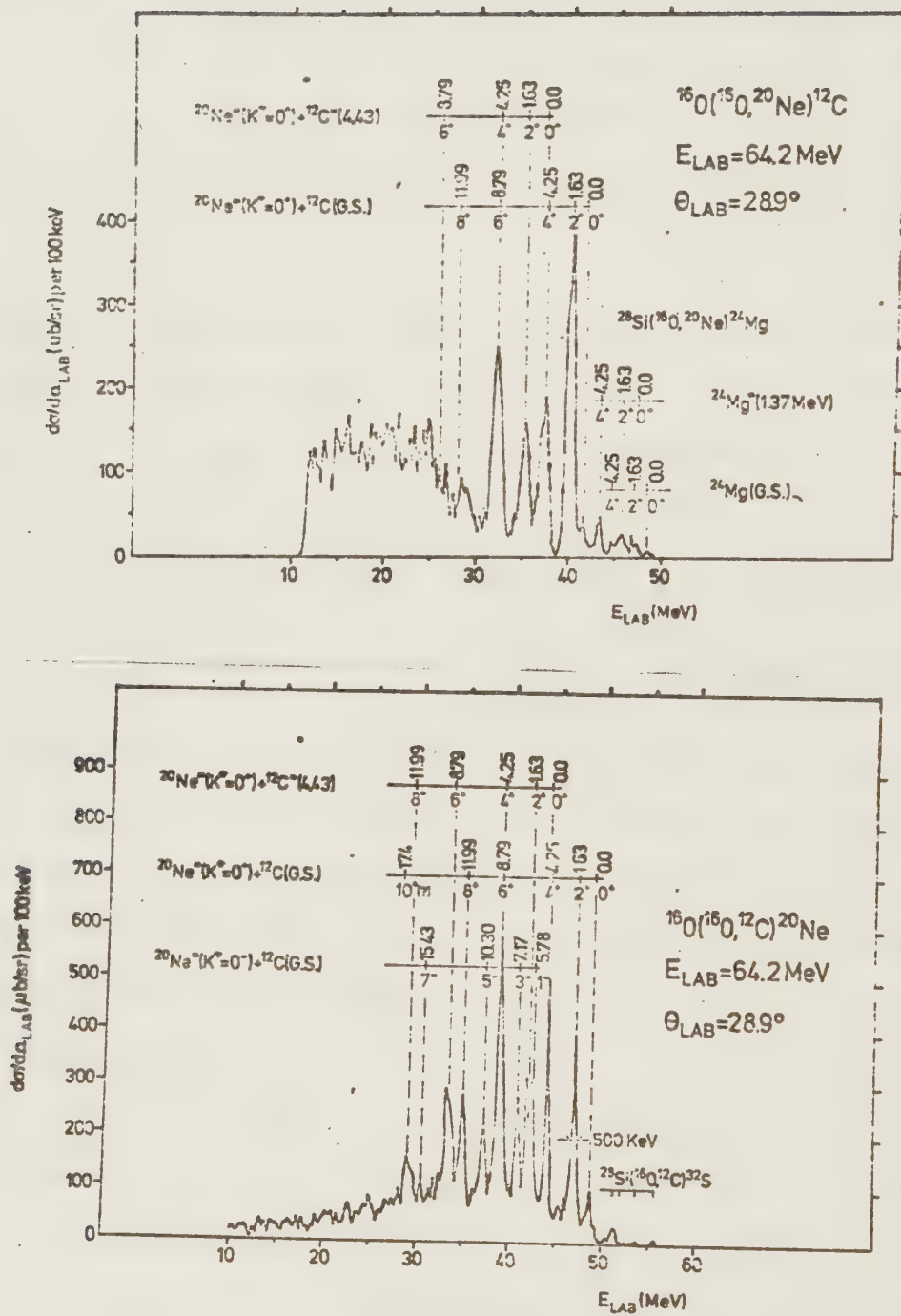


Fig. (I.3)

Anregungsfunktion für α - Transfer zum Target und zum Projektil auf Ref. 12)

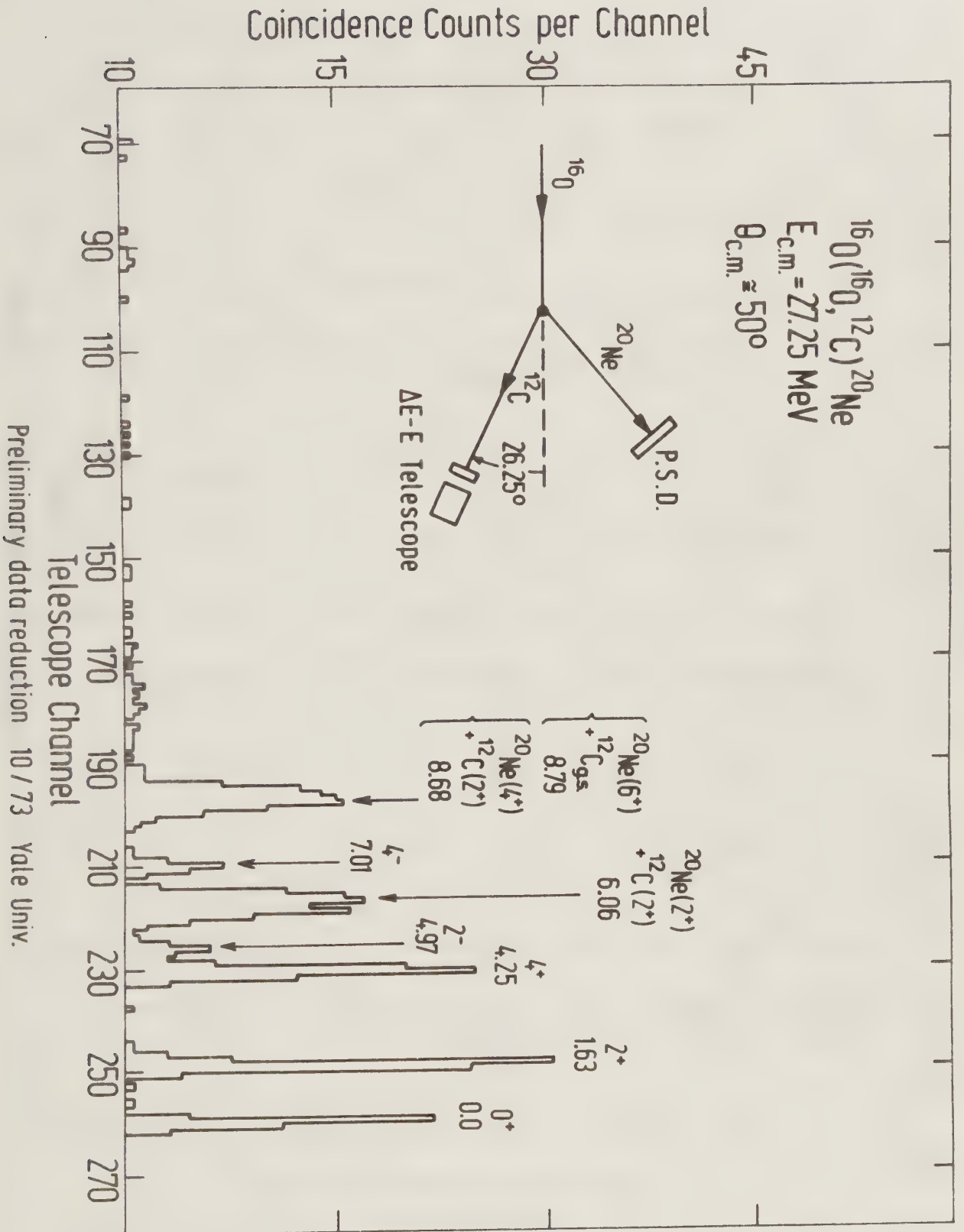


Fig. (I.4): Koinzidenzexperiment zur Bestimmung der Anregungsfunktion für $^{16}\text{O}(^{16}\text{O}, ^{12}\text{C})^{20}\text{Ne}$ aus Ref. 13).

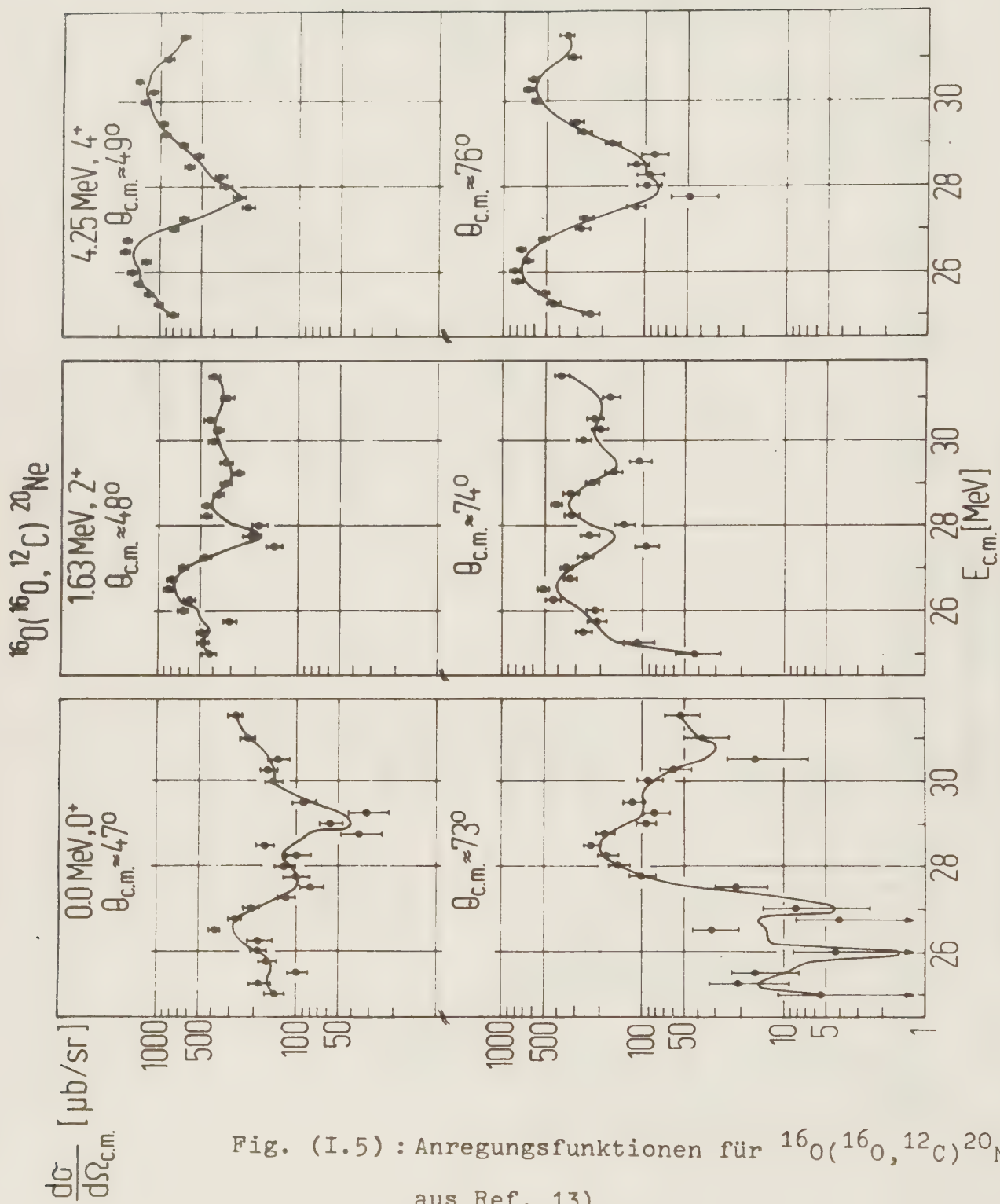
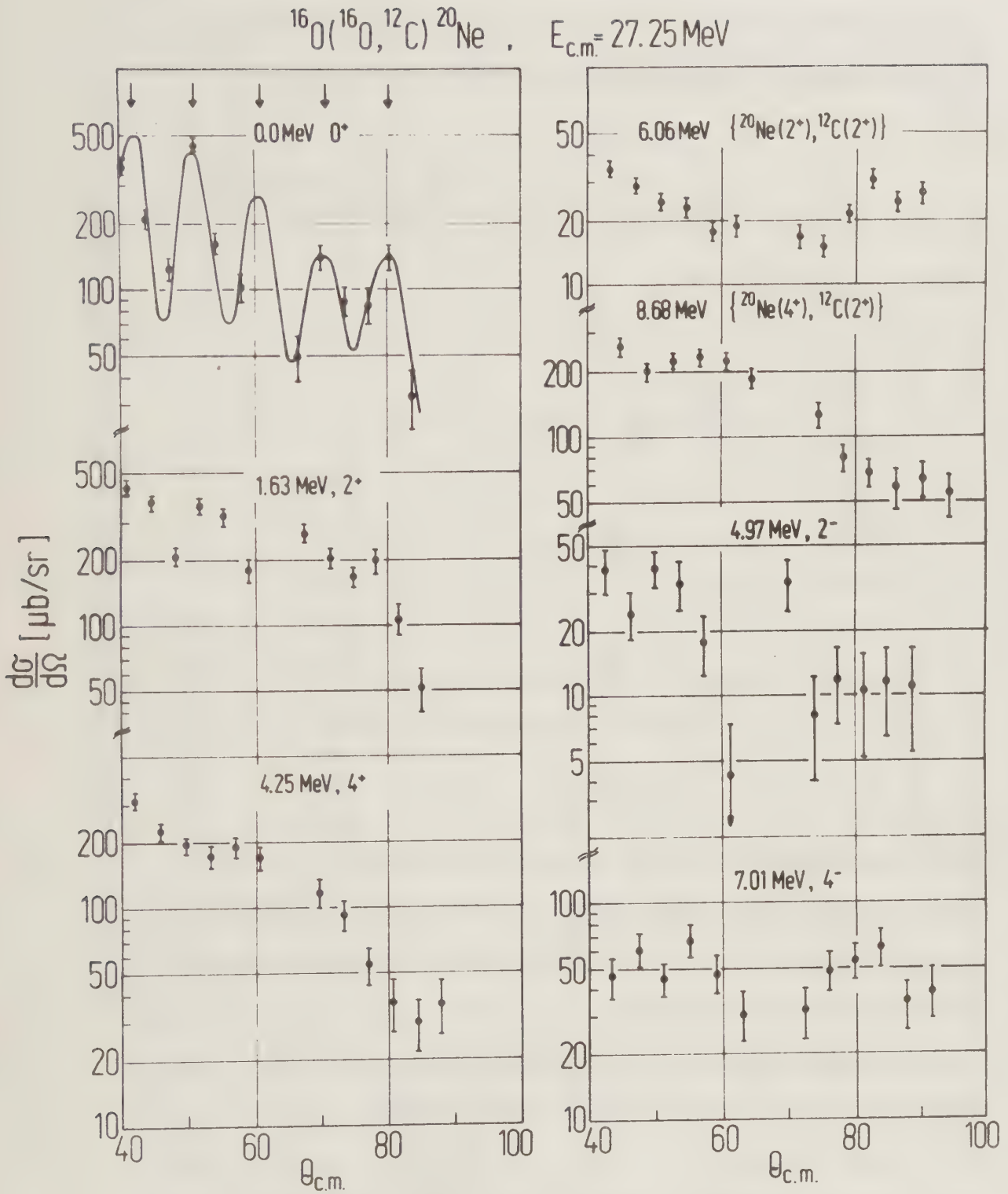


Fig. (I.5) : Anregungsfunktionen für $^{16}\text{O}(^{16}\text{O}, ^{12}\text{C})^{20}\text{Ne}$
aus Ref. 13).



Preliminary data reduction 10/73

Yale Univ.

Fig. (I.6): Winkelverteilungen für $^{16}\text{O}(^{16}\text{O}, ^{12}\text{C})^{20}\text{Ne}$
nach Ref. 13).

wo die gemittelten Streuquerschnitte des weitaus stärksten inelastischen Kanals mit denen der sechs wichtigen α -Transferkanäle verglichen wird. Wir sehen, daß die domi-

$\frac{dG}{d\Omega} \big _{\text{gem.}} [\text{mb/sr}]$	
$^{16}\text{O} - ^{16}\text{O}$ (6.5 , 0.0)	3.0
$^{12}\text{C} - ^{20}\text{Ne}$	
(0.0 , 0.0)	0.3
(0.0 , 1.63)	1.2
(0.0 , 4.25)	2.2
(4.43 , 1.63)	0.6
$\left\{ \begin{array}{l} (4.43 , 4.25) \\ (0.0 , 8.79) \end{array} \right\}$	0.4

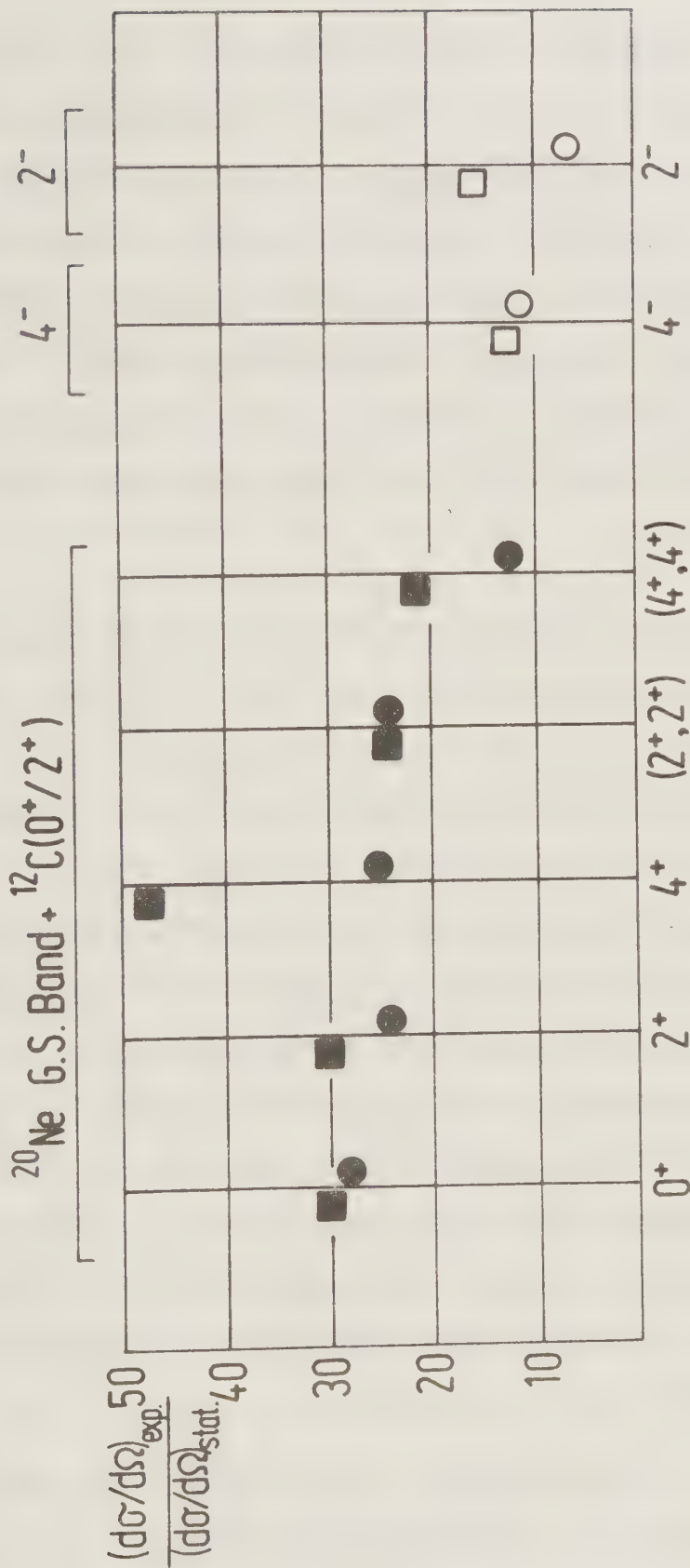
Tab. (I.1)

nierenden Transferkanäle in der Stärke vergleichbar mit dem inelastischen Kanal sind. In Figur (I.7) zeigen wir den Quotienten des experimentellen Wirkungsquerschnitts mit dem statistisch begründeten. Bei aller Vorsicht, die statistischen Vorhersagen entgegenzubringen ist - Ref. 9 zeigt die Uneindeutigkeit und Modellabhängigkeit von statistischen Rechnungen - legt dieses Ergebnis sehr nahe, daß zumindest die Übergänge in die ^{20}Ne - Grundzustandsbande und die ^{12}C - Zustände $[0.0, 0^+]$ sowie $[4.43, 2^+]$ direkte Reaktionen sind, die über einen Doppelresonanzmecha-

Comparison of energy-averaged cross sections with statistical predictions

$(25 \leq E_{c.m.} \leq 31.5 \text{ MeV})$

■ $\theta_{c.m.} \sim 50^\circ$
● $\theta_{c.m.} \sim 80^\circ$



Preliminary results 10 / 73 Yale Univ.

Fig. (I.7): Vergleich der experimentellen - Transfer - Querschnitte mit statistischen Vorhersagen für die verschiedenen Reaktionskanäle nach Ref. 13).

nismus erzeugt werden können.

Weidinger hat die α - Transfer - Querschnitte recht erfolgreich mit einer Hauser - Feshbach - Formel ¹⁴⁾ analysiert. Wir sind jedoch über eine Beschreibung dieser einzelnen Kanäle hinaus an ihrer Kopplung aneinander und an den elastischen Kanal interessiert. Deshalb behandeln wir das Streusystem im Formalismus der gekoppelten Kanäle. Andernfalls wäre eine DWBA - Rechnung zweiter Ordnung notwendig.

Verschiedene Aspekte des Vierteilchentransfers bei Schwerionenreaktionen sind bereits in der Literatur behandelt ¹⁵⁾. Im Allgemeinen werden Streuquerschnitte in DWBA berechnet ¹⁶⁾, wobei stets Approximationen für den Rückstoß gemacht werden. Sehr häufig begegnen wir der sog. Buttle - Goldfarb Näherung ¹⁷⁾, die bei Einnukleonentransfer in der Tat recht gut funktioniert, bei größerem Massentransfer jedoch zunehmend schlechter wird. Wie wichtig die exakte Berücksichtigung des Rückstoßes sein kann, ergibt sich auch aus Ref. 18, wo gezeigt wird, daß eine Reaktion, die bei Zero - Range - DWBA wie eine Compound - Reaktion aussah, ein direkter Cluster - Transfer ist. Der Formalismus der gekoppelten Kanäle für Schwerionen - Transferreaktionen ist in Ref. 19 - 21 umrissen.

In dieser Arbeit werden wir zunächst in Kapitel II den Formalismus der gekoppelten Kanäle gemäß den Gedanken der "Resonating Group Method" ²²⁾ für den Fall zweier verschie-

dener Fragmentationen formulieren. Anschließend machen wir spezielle Modellannahmen für die Lösung des $^{16}\text{O} - ^{16}\text{O}$ - Systems mit Einbeziehung des α - Transfers; ein Cluster - Modell bietet sich an. Die näherungsweise Lösung der daraus resultierenden nichtlokalen Wechselwirkungsterme wird Aufgabe der folgenden Kapitel sein. In Abschnitt IV widmen wir uns der analytischen Integration über die Winkel in den Wechselwirkungsintegralen. In Kapitel V diskutieren wir die Eigenschaften der ^{16}O - und ^{20}Ne - Zustände und die Anwendbarkeit von Cluster - Modellen zu ihrer Darstellung. Mit Modellpotentialen werden explizit die gebundenen Cluster - Cluster - Wellenfunktionen der bei uns vorkommenden Zustände berechnet. Anschließend werden die benötigten Cluster - Cluster - Potentiale besprochen und unsere explizite Wahl angegeben. In Abschnitt VII diskutieren wir eine Möglichkeit, die Radialintegrale aus III analytisch auszuführen, in VIII zeigen wir den numerischen Weg, der schließlich aus Gründen der Praktikabilität von uns gewählt wurde. In Kapitel IX führen wir dann an Hand eines Beispiels vor, wie man aus den einzelnen Details der vorhergehenden Abschnitte die nichtlokalen Wechselwirkungsterme konstruiert. Abschließend geben wir ein Resumé. In den Anhängen werden einzelne mathematische und formale Punkte in mehr Ausführlichkeit erläutert: Die explizite Form der Integralkerne in A1, die Umkopplung der Wellenfunktionen in A2, die Winkelintegrationen in A3 und die numerische Integration des gebundenen Cluster - Cluster - Potentials in A4. Anhang A5 befaßt sich mit Integralen

über Produkte von Besselfunktionen.

II. Der Formalismus

Als Voraussetzung für eine "Coupled Channel"- Rechnung mit mehreren offenen physikalischen Kanälen in zwei verschiedenen Fragmentationen, wie oben erklärt, müssen wir den als "Resonating Group Method" (RGM) bekannten Formalismus, wie ihn Scheid für seine Rechnungen verwendet hat, entsprechend erweitern. ²³⁾

Zunächst betrachten wir, um mit der Terminologie vertraut zu werden und der Übersicht halber, den Einkanal-Fall in einer Darstellung ähnlich der von Friedrich ²⁴⁾.

Für die Wellenfunktion eines Kern - Kern - Systems lautet der RGM - Ansatz:

$$\Psi_g(\vec{r}) = A \left[\phi_1(\vec{r}_1) \phi_2(\vec{r}_2) \varphi(\vec{r}) \right] \quad (\text{II.1})$$

ϕ_1 und ϕ_2 sind die intrinsischen Wellenfunktionen der einzelnen Kerne. Sie hängen von den inneren Koordinaten der Kerne ab, die symbolisch durch $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ ausgedrückt sind; die Indizes der ϕ fassen alle Quantenzahlen dieser Untersysteme zusammen. Die Wellenfunktion φ beschreibt die Relativbewegung der Kerne gegeneinander und hängt ab von der Schwerpunktdifferenz zwischen Kern 1 und Kern 2:

$$\vec{r} = \frac{1}{A_1} \sum_{i \in 1} \vec{x}_i - \frac{1}{A_2} \sum_{i \in 2} \vec{x}_i \quad (\text{II.2})$$

$\vec{x}_i$ sind die Nukleonenkoordinaten der beiden Kerne. Da Austausch von gleichviel Nukleonen zwischen den beiden Kernen physikalisch nicht beobachtbar ist, muß die Gesamt-

wellenfunktion antisymmetrisiert werden, was durch den Operator

$$A = \sum_P (-1)^P P \quad (II.3)$$

besorgt wird. P ist der Permutationsoperator zweier beliebiger Einteilchenkoordinaten, die Summe erstreckt sich über alle Permutationen. Der Ansatz (II.1) hängt nicht vom Gesamtschwerpunkt des Systems ab. Die physikalische Forderung nach Translationsinvarianz ist also a priori erfüllt. Die intrinsischen Funktionen der Kerne 1 und 2, Φ_1 und Φ_2 , werden aus einem mikroskopischen oder phänomenologischen Modell gewonnen und als bekannt vorausgesetzt. Im Rahmen der RGM ist die Relativwellenfunktion $\varphi(\vec{r})$ zu berechnen.

Die Schrödingergleichung des Systems lautet:

$$(H - E) \psi_g(\xi) = 0 \quad (II.4)$$

mit dem mikroskopischen Hamiltonoperator

$$H = \sum_i t_i - T_{cm} + \sum_{i < j} V_{ij} \quad i, j = 1 \dots A_1 + A_2 \quad (II.5)$$

Drei- und Mehrkörperwechselwirkungen zwischen Nukleonen bleiben hier unberücksichtigt. Es ist zweckmäßig, den Hamiltonoperator in einer Struktur, passend zu (II.1) zu schreiben:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 + H_1 + H_2 + V_{1-2} \quad (II.6)$$

wo H_1 und H_2 intrinsische Hamiltonoperatoren der Kerne 1 und 2 sind, die jeder für sich die Schrödingergleichung

$$(H_k - \varepsilon_k) \phi_k = 0 \quad k = 1, 2 \quad (\text{II.7})$$

erfüllen. ε_k ist die innere Energie des betreffenden Kernes. $-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2$ ist der Operator für die kinetische Relativenergie der Kerne, V_{1-2} die Summe aller Zweikörperwechselwirkungen von Nukleonen aus 1 mit Nukleonen aus 2, also der Anteil aus $\sum_{i < j} V_{ij}$, der weder in H_1 noch in H_2 enthalten ist. Um die inneren Koordinaten herauszuprojizieren, überschiebt man (II.4) mit $\phi_1(r_1)$ und $\phi_2(r_2)$ und erhält:

$$\langle \phi_1(r_1) \phi_2(r_2) | H - E | \psi_q(r) \rangle = 0 \quad (\text{II.8})$$

Integriert wird über die Koordinaten r_1 und r_2 . Gleichung (II.8) ist demnach eine Funktion von $\vec{r}$ allein, das in ψ_q vorkommt und über das nicht integriert wird. Wenn man (II.1) und (II.6) in (II.8) einsetzt, erhält man mit $A = 1 + (A-1)$:

$$\langle \phi_1(r_1) \phi_2(r_2) | -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 + H_1 + H_2 + V_{12} - E | \phi_1(r_1) \phi_2(r_2) \varphi(\vec{r}) \rangle \quad (\text{II.9})$$

$$+ \langle \phi_1(r_1) \phi_2(r_2) | (H - E)(A - 1) | \phi_1(r_1) \phi_2(r_2) \varphi(\vec{r}) \rangle = 0$$

Dies geht mit (II.7) und unter der Voraussetzung, daß ϕ_1 und ϕ_2 auf 1 normiert sind, umzuschreiben:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - E \right) \varphi(\vec{r}) = \\ & - \langle \phi_1(r_1) \phi_2(r_2) | V_{12} | \phi_1(r_1) \phi_2(r_2) \varphi(\vec{r}) \rangle \\ & - \langle \phi_1(r_1) \phi_2(r_2) | (H - E)(A - 1) | \phi_1(r_1) \phi_2(r_2) \varphi(\vec{r}) \rangle \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

Nehmen wir noch an, daß die Zweikörperwechselwirkungen V_{ij}

aus $V_{12} = \sum_{i \in 1, j \in 2} v_{ij}$ lokal sind, so wirkt V_{12} stets multiplikativ auf $\psi_9(\vec{r})$, so daß der erste Term der rechten Seite von (II.10) darstellbar ist als $V(\vec{r})\varphi(\vec{r})$ mit

$$V(\vec{r}) = \langle \Phi_1(\xi_1) \Phi_2(\xi_2) | \sum_{\substack{i \in 1 \\ j \in 2}} v_{ij} | \Phi_1(\xi_1) \Phi_2(\xi_2) \rangle \quad (\text{II.11})$$

Schreibt man in dem letzten Matrixelement von (II.10) $\varphi(\vec{r})$ formal als $\int d^3\vec{r}' \delta(\vec{r}-\vec{r}') \varphi(\vec{r}')$, so kann man $\varphi(\vec{r}')$ aus dem Integral über ξ_1 und ξ_2 herausziehen und erhält für diesen Term:

$$\int K(\vec{r}, \vec{r}') \varphi(\vec{r}') d^3\vec{r}' \quad (\text{II.12a})$$

mit

$$K(\vec{r}, \vec{r}') = \langle \Phi_1(\xi_1) \Phi_2(\xi_2) | (H - E)(A - 1) | \Phi_1(\xi_1) \Phi_2(\xi_2) \varphi(\vec{r}-\vec{r}') \rangle \quad (\text{II.12b})$$

Gleichung (II.10) ist also eine Integro - Differentialgleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_{\vec{r}}^2 + V(\vec{r}) - E\right) \varphi(\vec{r}) + \int K(\vec{r}, \vec{r}') \varphi(\vec{r}') d^3\vec{r}' = 0 \quad (\text{II.13})$$

$$E = E_1 + E_2$$

$V(\vec{r})$ ist ein effektives lokales Potential zwischen den Kernen 1 und 2. Der nichtlokale Anteil der effektiven Kern-Kern - Wechselwirkung, $K(\vec{r}, \vec{r}')$, ist regulär und kurzreichweitig in den beiden Variablen r und r' . Die Kurzreichweitigkeit ist sofort einzusehen: Für r oder $r' \gtrsim R_1 + R_2 + 2.7 \text{ fm}$ findet keine Wechselwirkung über die Kernkräfte mehr statt (wegen der Kurzreichweitigkeit der Kernkräfte).

Wir haben jetzt das Rüstzeug, um die notwendige Erweiterung auf Vielkanalsysteme in verschiedenen Fragmentationen durchzuführen:

Ein Projektil $A_1^{\alpha_1}$ wird auf das Target $A_2^{\alpha_2}$ geschossen, der obere Index α_1 bzw α_2 bezeichnet den physikalischen Zustand der Kerne, im Eingangskanal ist es stets der Grundzustand, der Ausgangskanal ist eine Überlagerung aller möglichen Zustände der gleichen Fragmentation ($A_1^{\alpha_1'}$, $A_2^{\alpha_2'}$) sowie der Zustände nach Transfer der Teilchengruppe b: $(A_1 - b)^{\alpha_3'} = A_3^{\alpha_3'}$ und $(A_2 + b)^{\alpha_4'} = A_4^{\alpha_4'}$. Wir beschränken uns auf Zwei - Teilchen - Ausgangskanäle, Aufbruch in drei oder mehr Fragmente bei der Reaktion wird vernachlässigt. Die Gesamtwellenfunktion des Systems lautet jetzt in Analogie zu (II.1) :

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{tot}}(f) = & \sum_{\alpha_1' \alpha_2' \kappa'} \mathcal{A} [\phi_1^{\alpha_1'}(\xi_1) \phi_2^{\alpha_2'}(\xi_2) \varphi^{\kappa'}(\vec{r}_1)] \\ & + \sum_{\alpha_3' \alpha_4' \lambda'} \mathcal{A} [\phi_3^{\alpha_3'}(\xi_3) \phi_4^{\alpha_4'}(\xi_4) \varphi^{\lambda'}(\vec{r}_2)] \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

Die Quantenzahlen α_i' beschreiben die inneren Zustände der Fragmente, κ' und λ' sind die Quantenzahlen der Relativbewegung, die von α_1' und α_2' bzw α_3' und α_4' sowie dem Bahndrehimpuls der Relativbewegung und dem Gesamtdrehimpuls des Systems abhängen. ξ_3 steht für die inneren Koordinaten des A_3 - Kernes, ξ_4 die des A_4 - Kernes und $\vec{r}_2$ ist die A_3 - A_4 - Relativkoordinate. Die Schrödingergleichung (II.4) und der Hamiltonoperator (II.5) haben hier völlig analoge Gestalt.

Es gibt jetzt jedoch zwei äquivalente Schreibweisen für die Aufspaltung nach (II.6): $H \equiv H_1 \equiv H_2$

wobei

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2\mu_{A_1 A_2}} \nabla_{\vec{r}_1}^2 + H_{A_1} + H_{A_2} + V_{A_1-A_2} \quad (\text{II.15})$$

und

$$H_2 = -\frac{\hbar^2}{2\mu_{A_3 A_4}} \nabla_{\vec{r}_2}^2 + H_{A_3} + H_{A_4} + V_{A_3-A_4}$$

mit

$$H_{A_1} \phi_{A_1}^{\alpha_1'} = \varepsilon_{A_1}^{\alpha_1'} \phi_{A_1}^{\alpha_1'}$$

und analog für A_2 bis A_4 .

Will man die Relativwellenfunktion der A_1-A_2 -Konfiguration herausprojizieren, so nimmt man zweckmäßigerweise die Darstellung H_1 , bei der A_3-A_4 -Relativwelle H_2 . Anstelle der Gleichung (II.9) erhalten wir zwei Gleichungssysteme:

$$\langle \phi_1^{\alpha_1}(\vec{r}_1) \phi_2^{\alpha_2}(\vec{r}_2) | -\frac{\hbar^2}{2\mu_{A_1 A_2}} \nabla_{\vec{r}_1}^2 + H_{A_1} + H_{A_2} + V_{A_1-A_2} - E | \phi_1^{\alpha_1}(\vec{r}_1) \phi_2^{\alpha_2}(\vec{r}_2) \varphi^{\kappa}(\vec{r}_1) \rangle$$

$$+ \langle \phi_1^{\alpha_1}(\vec{r}_1) \phi_2^{\alpha_2}(\vec{r}_2) | H_1 - E | \sum_{\alpha_1' \alpha_2'} (1 - \delta_{\alpha_1 \alpha_1'} \delta_{\alpha_2 \alpha_2'}) \phi_1^{\alpha_1'}(\vec{r}_1) \phi_2^{\alpha_2'}(\vec{r}_2) \varphi^{\kappa'}(\vec{r}_1) \rangle \quad (\text{II.16})$$

$$+ \langle \phi_1^{\alpha_1}(\vec{r}_1) \phi_2^{\alpha_2}(\vec{r}_2) | (H_1 - E) \mathcal{Q} | \sum_{\alpha_3' \alpha_4'} \phi_3^{\alpha_3'}(\vec{r}_3) \phi_4^{\alpha_4'}(\vec{r}_4) \varphi^{\lambda'}(\vec{r}_2) \rangle$$

$$= 0$$

$$\text{und } \langle \phi_3^{\alpha_3}(\xi_3) \phi_4^{\alpha_4}(\xi_4) | -\frac{\hbar^2}{2\mu_{A_3 A_4}} \nabla_{\vec{r}_2}^2 + H_{A_3} + H_{A_4} + V_{A_3-A_4} - E | \phi_3^{\alpha_3}(\xi_3) \phi_4^{\alpha_4}(\xi_4) \varphi^{\lambda'}(\vec{r}_2) \rangle$$

$$+ \langle \phi_3^{\alpha_3}(\xi_3) \phi_4^{\alpha_4}(\xi_4) | H_2 - E | \sum_{\alpha_3' \alpha_4'} (1 - \delta_{\alpha_3 \alpha_3'} \delta_{\alpha_4 \alpha_4'}) \phi_3^{\alpha_3'}(\xi_3) \phi_4^{\alpha_4'}(\xi_4) \varphi^{\lambda'}(\vec{r}_2) \rangle$$

(II.17)

$$+ \langle \phi_3^{\alpha_3}(\xi_3) \phi_4^{\alpha_4}(\xi_4) | (H_2 - E)(\mathcal{Q} - 1) | \sum_{\alpha_3' \alpha_4'} \phi_3^{\alpha_3'}(\xi_3) \phi_4^{\alpha_4'}(\xi_4) \varphi^{\lambda'}(\vec{r}_2) \rangle$$

$$+ \langle \phi_3^{\alpha_3}(\xi_3) \phi_4^{\alpha_4}(\xi_4) | (H_2 - E) \mathcal{Q} | \sum_{\alpha_1' \alpha_2'} \phi_1^{\alpha_1'}(\xi_1) \phi_2^{\alpha_2'}(\xi_2) \varphi^{\kappa'}(\vec{r}_1) \rangle = 0$$

Im Gegensatz zu (II.10) können hier die Zweikörperkräfte $V_{A_i-A_j}$ sehr wohl von den intrinsischen Koordinaten der Cluster abhängen. Kollektive Cluster - Anregungen werden durch eben diese Abhängigkeit erzeugt ¹⁰⁾. Wir haben ebenso viele Gleichungen wie physikalische Kanäle. Unter der Voraussetzung, daß die intrinsischen Funktionen für jeden Kern orthonormiert sind, läßt sich (II.16) kompakter schreiben:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu_{A_1 A_2}} \nabla_{\vec{r}_1}^2 + V_{A_1-A_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(\vec{r}_1) - \mathcal{E}^{\alpha_1 \alpha_2} \right) \varphi^{\kappa}(\vec{r}_1)$$

$$+ \sum_{\kappa'} G_{A_1 A_2}^{\kappa \kappa'}(\vec{r}_1) \varphi^{\kappa'}(\vec{r}_1)$$

$$+ \sum_{\kappa'} \int K_1^{\kappa \kappa'}(\vec{r}_1, \vec{r}_1') \varphi^{\kappa'}(\vec{r}_1') d^3 \vec{r}_1'$$

$$+ \sum_{\lambda'} \int K_2^{\kappa \lambda'}(\vec{r}_2, \vec{r}_2') \varphi^{\lambda'}(\vec{r}_2') d^3 \vec{r}_2' = 0$$

(II.18)

mit

$$\mathcal{E}^{\alpha_1 \alpha_2} = E - \epsilon_{\alpha_1} - \epsilon_{\alpha_2}$$

Dabei ist der Anteil des Potentials, der keine Übergänge

erzeugen kann, vorgezogen.

$$V_{A_1-A_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(\vec{r}_1) = \langle \phi_1^{\alpha_1}(\xi_1) \phi_2^{\alpha_2}(\xi_2) | V_{A_1-A_2}(\vec{r}_1, \xi_1, \xi_2) | \phi_1^{\alpha_1}(\xi_1) \phi_2^{\alpha_2}(\xi_2) \rangle \quad (\text{II.19a})$$

Der lokale Anteil des Übergangspotentials steckt in G :

$$G_{A_1 A_2}^{\kappa \kappa'}(\vec{r}_1) = \langle \phi_1^{\alpha_1}(\xi_1) \phi_2^{\alpha_2}(\xi_2) | V_{A_1-A_2}(\vec{r}_1, \xi_1, \xi_2) | (1 - \delta_{\alpha_1 \alpha_1'} \delta_{\alpha_2 \alpha_2'}) \phi_1^{\alpha_1'}(\xi_1) \phi_2^{\alpha_2'}(\xi_2) \rangle \quad (\text{II.19b})$$

, wobei

$$V_{A_1 A_2}(\vec{r}_1, \xi_1, \xi_2) = \sum_{i \in A_1, j \in A_2} v_{ij}(\vec{r}_{ij})$$

Der Integralkern K_1 ist wieder völlig analog zu (II.12):

$$K_1^{\kappa \kappa'}(\vec{r}_1, \vec{r}_1') = \langle \phi_1^{\alpha_1}(\xi_1) \phi_2^{\alpha_2}(\xi_2) | (H_1 - E)(Q - 1) | \phi_1^{\alpha_1'}(\xi_1) \phi_2^{\alpha_2'}(\xi_2) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_1') \rangle \quad (\text{II.20})$$

K_2 enthält die Wechselwirkung der A_1-A_2 - Konfiguration mit der A_3-A_4 - Fragmentation :

$$K_2^{\kappa \lambda'}(\vec{r}_1, \vec{r}_2') = \langle \phi_1^{\alpha_1}(\xi_1) \phi_2^{\alpha_2}(\xi_2) | (H_1 - E) Q | \phi_3^{\alpha_3'}(\xi_3) \phi_4^{\alpha_4'}(\xi_4) \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_2') \rangle \quad (\text{II.21})$$

wobei wir wieder formal geschrieben haben:

$$\varphi(\vec{r}_2) = \int d^3 \vec{r}_2' \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_2') \varphi(\vec{r}_2')$$

Völlig gleich wie in (II.18) stellen wir das Gleichungs-

system für die $A_3 - A_4$ - Relativwelle auf :

$$\begin{aligned}
 & \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu_{A_3 A_4}} \nabla_{\vec{r}_2}^2 + V_{A_3 A_4}^{\alpha_3 \alpha_4}(\vec{r}_2) - \varepsilon^{\alpha_3 \alpha_4} \right) \varphi^\lambda(\vec{r}_2) \\
 & + \sum_{\lambda'} G_{A_3 A_4}^{\lambda \lambda'}(\vec{r}_2) \varphi^{\lambda'}(\vec{r}_2) \\
 & + \sum_{\lambda'} \int K_3^{\lambda \lambda'}(\vec{r}_2, \vec{r}_2') \varphi^{\lambda'}(\vec{r}_2) d^3 \vec{r}_2' \\
 & + \sum_{\kappa'} \int K_4^{\lambda \kappa'}(\vec{r}_2, \vec{r}_1') \varphi^{\kappa'}(\vec{r}_1') d^3 \vec{r}_1' = 0
 \end{aligned} \tag{II.22}$$

Die Hauptschwierigkeit bei der Lösung von (II.18) und (II.22) stellt das Problem, die funktionale Form der nicht-lokalen Integralkerne $K_1 \dots K_4$ zu ermitteln. Im folgenden werden wir vereinfachte physikalische Annahmen in den Ansatz (II.14) stecken und einen numerisch bewältigbaren Weg der näherungsweisen Lösung der Integro - Differentialgleichungen einschlagen.

III. Modellannahmen für das $^{16}\text{O} - ^{16}\text{O}$ - System

Die exakte Berücksichtigung der Antisymmetrisierung der Wellenfunktionen bei Berechnung der Integralkerne in (II.18) und (II.22) führt auf mehr als 600 Millionen ⁺) Terme in K_1 und K_4 sowie über 200 Millionen in K_2 und K_3 . Dies entzieht sich der numerischen Behandlung. Wir müssen vielmehr eine Formulierung finden, in der der Haupteffekt der Antisymmetrisierung mit wenigen Gliedern berücksichtigt wird. In Ref. 25 wird das Problem der Antisymmetrisierung eingehend diskutiert. Wir denken uns den ^{16}O - Kern als aus zwei in sich abgeschlossenen Unterstrukturen zusammengesetzt und reduzieren so das 32 - Nukleonen - System auf ein Vier - Körper - Problem. Infolge der Abgeschlossenheit der einzelnen Cluster wird bei der Antisymmetrisierung nur der simultane Austausch aller Nukleonen der einzelnen Untergruppen untereinander berücksichtigt, was einer Symmetrisierung entspricht, da die Cluster jeweils eine gerade Anzahl von Nukleonen enthalten sollen.

$$\begin{aligned} \psi_{\text{tot}}(1,2,3,4) &= \sum_{\kappa} S \psi_{\kappa}(1,2,3,4) \\ &= \sum_{\kappa} \left(\psi_{\kappa}(1,2,3,4) + \psi_{\kappa}(1,3,2,4) \right. \\ &\quad \left. + \psi_{\kappa}(4,2,3,1) + \psi_{\kappa}(4,3,2,1) \right) \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

+) Die exakte Anzahl der Permutationen ist für $^{16}\text{O} - ^{16}\text{O}$ $\binom{32}{16} - 1 = 601\,080\,389$ und für $^{20}\text{Ne} - ^{12}\text{C}$ gleich $\binom{32}{20} - 1 = 225\,792\,839$.

1 ... 4 bezeichnen die Koordinaten der vier Cluster, die physikalischen Kanäle sind mit κ bezeichnet.

Da wir in dieser Arbeit neben der $^{16}\text{O} - ^{16}\text{O}$ - auch die $^{20}\text{Ne} - ^{12}\text{C}$ - Fragmentation des 32 - Nukleonen - Systems untersuchen wollen, liegt es nahe, als Cluster ^{12}C und α anzunehmen.

Bevor wir uns genauer mit dem Aufbau der Wellenfunktionen befassen, wollen wir den Begriff der Kanalwellenfunktion einführen. Diese ist definiert als die Wellenfunktion in einem bestimmten physikalischen Kanal ohne den Radialanteil der Streuwelle. Die Gesamtwellenfunktion ist dann die Summe aller symmetrisierten Produkte dieser Kanalfunktionen mit den dazugehörigen Streuradialfunktionen :

$$\psi_{\text{tot}}^{\text{I}} = \sum_{\kappa} S \psi^{\text{I},\kappa} R^{\kappa} \quad (\text{III.2})$$

Man faßt also die bekannten Anteile - intrinsische Funktionen der Kerne und die Kinematik der Streuung - in der Kanalwelle zusammen und hat so, auch optisch anschaulich, die zu bestimmenden Radialfunktionen der Streuung herausgestellt.

Die Kanalwellenfunktionen setzen sich in ihrem Aufbau aus drei Anteilen zusammen, aus den intrinsischen Funktionen χ der einzelnen Cluster, aus den gebundenen Relativwellenfunktionen ψ zwischen den Clustern, die Target - bzw. Projektilkern bilden und aus dem Winkelanteil $Y_{\ell m}$ der Streuwellenfunktion.

In der Fragmentation 12 - 34 ergibt sich folgendes Bild:
Die Cluster 1 und 2 mit intrinsischen Funktionen χ_1 und χ_2 mit Spin j_1 und j_2 werden zum inneren Drehimpuls j_{12} gekoppelt; die gebundene Relativwellenfunktion φ_{12} mit Bahndrehimpuls l_{12} wird angekoppelt zum Gesamtspin I_{12} des Kernes 12. Dasselbe geschieht mit den Clustern 3 und 4, die zum Kern 34 mit Spin I_{34} verbunden werden. Die beiden so konstruierten Kerne werden nun zum inneren Drehimpuls des Gesamtsystems verkoppelt und anschließend mit dem Winkelanteil $Y^{[L]}$ der Streuwelle zum Gesamtdrehimpuls I . Da Gesamtdrehimpulserhaltung während des Streuprozesses eine elementare physikalische Forderung ist, liegt I bei vorgegebenem Eingangskanal für alle Ausgangskanäle fest.

In der 12 - 34 - Konfiguration lautet dann die Kanalfunktion zum Kanal κ mit Gesamtdrehimpuls I :

$$\psi_{12-34}^{I,\kappa} = \left[\left[\left[\chi_{(1)}^{j_1, \alpha_1} \otimes \chi_{(2)}^{j_2, \alpha_2} \right]^{j_{12}, \alpha_{12}} \otimes \varphi_{(12)}^{l_{12}, n_{12}} \right]^{I_{12}, \kappa_{12}} \otimes \left[\left[\chi_{(3)}^{j_3, \alpha_3} \otimes \chi_{(4)}^{j_4, \alpha_4} \right]^{j_{34}, \alpha_{34}} \otimes \varphi_{(34)}^{l_{34}, n_{34}} \right]^{I_{34}, \kappa_{34}} \right]^{J, \kappa} \otimes Y_{(12-34)}^L \Big]^{I, \kappa} \quad (\text{III.3})$$

$\alpha_i, i=1...4, \alpha_{12}, \alpha_{34}, n_{12}, n_{34}, \kappa_{12}$ sowie κ_{34} und κ bezeichnen symbolisch sämtliche Quantenzahlen außer den explizit angegebenen Drehimpulsen und $\alpha_{12} = (j_1, \alpha_1, j_2, \alpha_2)$ sowie $\kappa_{12} = (j_{12}, \alpha_{12}, l_{12}, n_{12})$.

Nach demselben Schema konstruiert lautet die Kanalwellenfunktion in der Konfiguration 123 - 4 :

$$\psi_{123-4}^{I,\lambda} = \left[\left[\left[\left[\left[\chi_{(1)}^{\tilde{j}_1, \tilde{\alpha}_1} \otimes \chi_{(2)}^{\tilde{j}_2, \tilde{\alpha}_2} \right]^{\tilde{j}_{12}, \tilde{\alpha}_{12}} \otimes \varphi_{(2)}^{\tilde{l}_{12}, \tilde{n}_{12}} \right]^{\tilde{I}_{12}, \lambda_{12}} \otimes \chi_{(3)}^{\tilde{j}_3, \tilde{\alpha}_3} \right]^{\tilde{j}_{123}, \tilde{\alpha}_{123}} \right. \right. \\ \left. \left. \otimes \varphi_{(12-3)}^{\tilde{l}_{123}, \tilde{n}_{123}} \right]^{\tilde{I}_{123}, \lambda_{123}} \otimes \chi_{(4)}^{\tilde{j}_4, \tilde{\alpha}_4} \right]^{\tilde{j}, \lambda} \otimes Y_{(123-4)}^{\tilde{e}} \right]^{I, \lambda} \quad (\text{III.4})$$

In dieser Form sind die Wellenfunktionen für unsere Rechnungen noch nicht brauchbar. In Anhang A2 wird die Umkoppungstechnik ²⁶⁾ vorgeführt, mit der die Wellenfunktionen folgende Gestalt erhalten :

$$\psi_{12-34}^{I,\kappa} = \sum_{L_1 L_2 L_3} C_{12-34}(\{L_i\}) \left[X_{(1,2,3,4)}^{L_1, \{\alpha_i\}} \otimes \left[\left[\varphi_{(12)}^{L_{12}, n_{12}} \otimes \varphi_{(34)}^{L_{34}, n_{34}} \right]^{L_2, n_2} \otimes Y_{(12-34)}^e \right]^{L_3, n_3} \right]^{I, \kappa} \quad (\text{III.5})$$

und

$$\psi_{123-4}^{I,\lambda} = \sum_{\substack{N_1 N_2 N_3 \\ N_4 N_5}} C_{123-4}(\{N_i\}) \left[X_{(1,2,3,4)}^{N_3, \{\tilde{\alpha}_i\}} \otimes \left[\left[\varphi_{(12)}^{\tilde{l}_{12}, \tilde{n}_{12}} \otimes \varphi_{(34)}^{\tilde{l}_{34}, \tilde{n}_{34}} \right]^{N_4, n_4} \otimes Y_{(123-4)}^{\tilde{e}} \right]^{N_5, n_5} \right]^{I, \lambda} \quad (\text{III.6})$$

L_1 , $i = 1, 2, 3$ und N_1 , $i = 1 \dots 5$ sind Zwischendrehimpulse, die bei der Umformung auftreten und über die zu summieren ist. C_{12-34} und C_{123-4} sind Phasen, Clebsche und 6-j-Symbole, die von den physikalischen Drehimpulsen und den Zwischendrehimpulsen abhängen. Sämtliche intrinsischen Clusterfunktionen sind jetzt in den Funktionen $X_{(1,2,3,4)}$ zusammengefaßt, die wir später in einfach-

ster Weise von der Gesamtwellenfunktion abkoppeln können.

$$X_{(1,2,3,4)}^{L, \alpha_{1234}} = \left[\left[\chi_{(1)}^{j_1, \alpha_1} \otimes \chi_{(2)}^{j_2, \alpha_2} \right]^{j_{12}, \alpha_{12}} \otimes \left[\chi_{(3)}^{j_3, \alpha_3} \otimes \chi_{(4)}^{j_4, \alpha_4} \right]^{j_{34}, \alpha_{34}} \right]^{L, \alpha_{1234}} \quad (\text{III.7})$$

α_{1234} bezeichnet symbolisch alle Quantenzahlen außer L :

$$\{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_{12}, \alpha_{34}, j_1, \dots, j_4, j_{12}, j_{34} \}$$

Die Gesamtwellen des Systems zu gegebenem I ist:

$$\Psi_{tot}^I = \quad (\text{III.8})$$

$$S \sum_{\kappa} \Psi_{12-34}^{I, \kappa} R_{(r_{12-34})}^{I, \kappa} + S \sum_{\lambda} \Psi_{123-4}^{I, \lambda} R_{(r_{123-4})}^{I, \lambda}$$

$R_{12-34}^{I, \kappa}$ und $R_{123-4}^{I, \lambda}$ sind die Radialanteile der Streuwellenfunktionen in den Fragmentationen $12 - 34$ und $123 - 4$. Für jeden Gesamtdrehimpuls I ist über alle übrigen Quantenzahlen (κ, κ' für die $12 - 34$ - Fragmentation und λ, λ' für $123 - 4$) zu summieren.

Im asymptotischen Bereich, d.h., wenn Target und Projektil weit voneinander entfernt sind, besteht keine Wechselwirkung zwischen den Clustern aus verschiedenen Kernen, die Wellenfunktionen ψ_{12-34} und ψ_{123-4} sind orthogonal. Innerhalb des Wechselwirkungsbereiches der effektiven Cluster - Cluster - Kräfte herrscht jedoch ein endlicher Überlapp, sowohl zwischen Wellenfunktionen verschiedener Fragmentationen als auch zwischen unterschiedlichen Sym-

metrisierungsstufen der gleichen Fragmentation. Da wir jedoch die Schrödingergleichung im Formalismus der gekoppelten Kanäle behandeln, verursacht diese Übervollständigkeit der Entwicklung der Wellenfunktion im Reaktionsgebiet keine Schwierigkeiten. Vielmehr ergibt der direkte Überlapp zweier Wellenfunktionen bereits einen Teil der effektiven Wechselwirkung. Der Überlapp zweier Konfigurationen bei kleinen Kern - Kern - Abständen projiziert heraus, zu welchem Anteil die eine Konfiguration bereits in der anderen 'vorgeformt' , also physikalisch enthalten ist. Die Geometrie des Systems ist in Fig. (III.1) dargestellt.

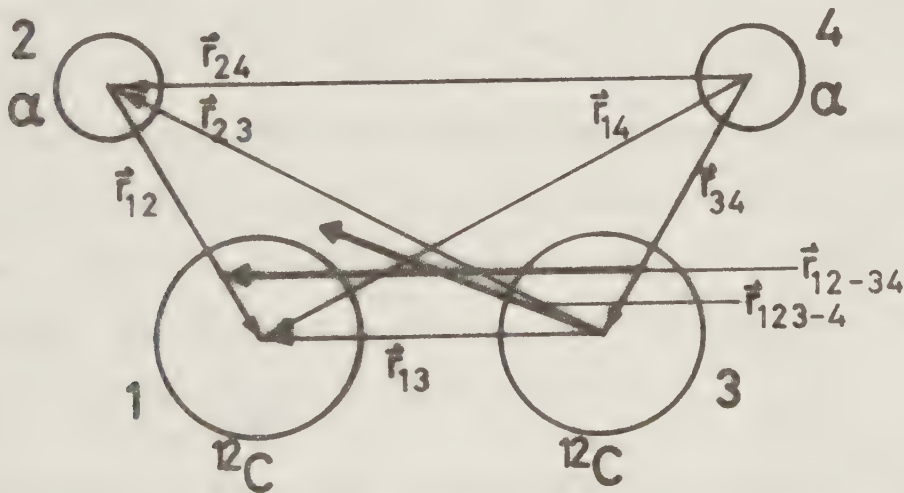


Fig.(III.1)

In unserem Modell treten bei einer Konfiguration, wie in Fig (III.1) gezeigt, insgesamt acht verschiedene Vektoren auf, sechs Cluster - Cluster - Abstände und zwei Kern - Kern - Relativvektoren. Diese sind jedoch nicht unabhängig voneinander. Bekanntlicherweise wird die relative La-

ge von vier Körpern zueinander eindeutig durch drei linear unabhängige Vektoren beschrieben. Für die Berechnung der Potentialmatrixelemente und der Integralkerne wählen wir nun stets drei geeignete Basisvektoren und drücken die übrigen auftretenden Relativvektoren als Linearkombination dieser drei aus.

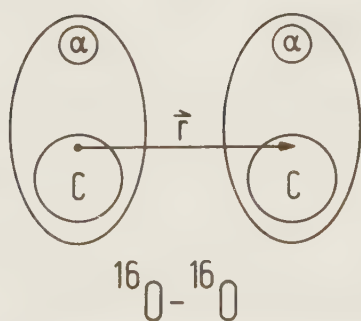
Die effektiven Kern - Kern - Potentiale aus (II.15),

$V_{16O-16O}$ und $V_{20Ne-12C}$, setzen sich zusammen aus den zwischen den Kernen wirkenden Cluster - Cluster - Wechselwirkungen $V_{12C-\alpha}$, $V_{\alpha-\alpha}$ und $V_{12C-12C}$. In der Konstellation von Fig. (III.2a) ist das effektive Potential:

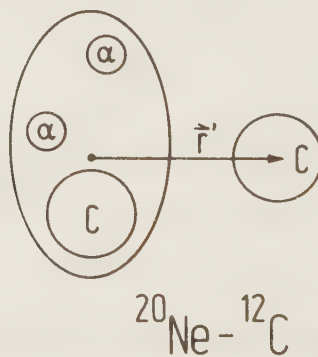
$$V_{12-34} = V_{13} + V_{14} + V_{23} + V_{24}$$

Das $^{20}Ne-^{12}C$ - Potential lautet gemäß Fig. (III.2b) :

$$V_{123-4} = V_{14} + V_{24} + V_{34}$$



(III.2a)



(III.2b)

Fig. (III.2)

Die Potentiale zwischen den Clustern lauten in Partialwellenzerlegung ¹⁰⁾ :

$$V_{ij}(\vec{r}_{ij}) = U(r_{ij}) + \sum_{\substack{l \geq 0 \\ -l \leq m \leq l}} (-1)^m Q_{lm}(r_{ij}, \xi_i, \xi_j) Y_{l-m}(\Omega_{ij}) \quad (\text{III.9})$$

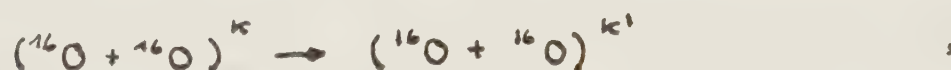
Der skalare Anteil U ist das mittlere optische Potential zwischen den Clustern. Die Multipolanteile Q_{lm} koppeln die Relativbewegung der Cluster an ihre intrinsischen (kollektiven) Freiheitsgrade, die durch die Koordinaten ξ_i und ξ_j beschrieben werden. Da das Gesamtpotential ein Skalar ist, bilden die Q_{lm} Tensoren vom Rang l .

Wir beschäftigen uns hier nur mit Clustern im Grundzustand, das heißt, wir vernachlässigen durch den Streuprozess induzierte intrinsische Clusteranregungen, so daß es ausreicht, den Monopolterm U der Potentialentwicklung mitzunehmen. Spezielle angeregte Zustände der Kerne ^{16}O und ^{20}Ne können bei uns durch die gebundene Relativbewegung der Cluster im Kern berücksichtigt werden.

Die gekoppelten Integro - Differentialgleichungen (II.18) sehen so aus :

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) + V_{^{16}\text{O}-^{16}\text{O}}(r) - \epsilon_K \right] R_{(r)}^{I l_K K} = \\ & - \sum_{K'} G_{(r)}^{KK'} R_{(r)}^{I l_K K} - \sum_{K'} \int K_{(r,r')}^{KK'} R_{(r')}^{I l_K K'} dr' \\ & - \sum_{\lambda'} \int K_{(r,r')}^{K\lambda'} R_{(r')}^{I l_{\lambda'} \lambda'} dr' \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

μ = reduzierte Masse von $^{16}\text{O} - ^{16}\text{O}$, ℓ_κ = Bahndrehimpuls der $^{16}\text{O} - ^{16}\text{O}$ - Relativbewegung im betrachteten Kanal κ , $V_{^{16}\text{O}-^{16}\text{O}}$ = wie in (II.19), $\mathcal{E}_\kappa$ = Gesamtenergie des $^{16}\text{O} - ^{16}\text{O}$ Systems abzüglich der intrinsischen Energien der ^{16}O - Kerne im Kanal κ . $G_{\kappa\kappa'}^{(r)}$ ist der lokale, $K_{\kappa\kappa'}^{(r,r')}$ der aus der Symmetrisierung stammende nichtlokale Anteil der Wechselwirkung



$K^{\kappa\lambda'}(r,r')$ beschreibt die Reaktion



Physikalische $^{16}\text{O} - ^{16}\text{O}$ - Kanäle sind stets mit κ, κ' bezeichnet, $^{20}\text{Ne} - ^{12}\text{C}$ mit λ, λ' . Wir haben hier nicht nur die inneren Koordinaten herausprojiziert, wie in (II.18) gezeigt, sondern auch den Winkelanteil der Relativbewegung, also die komplette Kanalfunktion. Die Übergangspotentiale $G^{\kappa\kappa'}(r)$ und $K^{\kappa\kappa'}(r,r')$ enthalten demnach implizit die Integration über den Winkelanteil der Relativbewegung. Die $R^{\mathbb{I}}(r)$ folgen aus der Zerlegung

$$\varphi_{(n)}^{\mathbb{I}}(\vec{r}) = R^{\mathbb{I}}(r) Y_{\mathbb{I}n}(\Omega_r)$$

Die Integralkerne haben diese Struktur:

$$K^{\kappa\kappa'}(r,r') = \sum_{G=2}^4 (K_{^{16}}^{\kappa\kappa'}(r,r') + K_{^{26}}^{\kappa\kappa'}(r,r')) \quad (\text{III.11a})$$

mit $K_{1G}^{\kappa\kappa'}(\tau, r^G) =$

$$\left[-\frac{\pi^2}{2\mu_0} \left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} - \frac{l_\kappa(l_\kappa+1)}{r^2} \right) - \epsilon_\kappa \right] \cdot$$

$$\mathbb{D} \int \psi_\kappa^{I l_\kappa*}(\xi_i) \psi_{\kappa'}^{I l_{\kappa'}}(\xi_i^G) d^3\xi_1 d^2\Omega_\tau d^2\Omega_{r^G}$$

und

(III.11b)

$K_{2G}^{\kappa\kappa'}(\tau, r^G) =$

$$\mathbb{D} \int \psi_\kappa^{I l_\kappa*}(\xi_i) V_{16_0-16_0}(\xi_i) \psi_{\kappa'}^{I l_{\kappa'}}(\xi_i^G) d^3\xi_1 d^2\Omega_\tau d^2\Omega_{r^G}$$

ξ_i sind die Koordinaten der Wellenfunktionen: $\xi_i = \{\vec{r}_{12}, \vec{r}_{14}, \vec{r}_{12-34}^A\}$

Die Cluster - Cluster - Potentiale hängen ab von den Koordinaten: $\xi_i = \{\vec{r}_{13}, \vec{r}_{14}, \vec{r}_{23}, \vec{r}_{24}\}$. Der Index G an einer Koordinate zeigt an, daß diese entsprechend dem Symmetrisierungszustand modifiziert ist, zum Beispiel bei Austausch von Cluster 1 und 4 ($G = 4$): $\vec{r}_{14}^G = \vec{r}_{41} = -\vec{r}_{14}$. $\mathbb{D}$ bezeichnet symbolisch die Jakobi - Determinante der Transformation auf die jeweils neue Basis. G sind die drei von der Ausgangskonfiguration verschiedenen Symmetrisierungsstufen des $16_0 - 16_0$ - Systems. Umbenennung der Integrationsvariablen in jedem einzelnen Integral erlaubt die formale Zusammenfassung zu einem einzigen Kern. Wir berechnen also die $K_{1G}^{\kappa\kappa'}(\tau, r^G)$ und $K_2^{\kappa\kappa'}(\tau, r^G)$ einzeln, benennen jeweils $r^G = r'$ und summieren auf.

Bei der Wahl des Volumenelements sind wir recht gebunden. Zwei Basisvektoren, $\vec{r}$ und $\vec{r}^G$ sind durch den Formalismus bestimmt, für den dritten nehmen wir $\vec{r}_{12} = \xi_1$, wo dieser 11-

near unabhängig ist von $\vec{r} = \vec{r}_{12-34}$ und $\vec{r}' = \vec{r}_{123-4}$, ansonsten $\vec{r}_{24}$.

Im Aufbau völlig gleich ist:

$$K^{\kappa\lambda'}(r, r') = \sum_{p=1}^4 (K_{3p}^{\kappa\lambda'}(r, r') + K_{4p}^{\kappa\lambda'}(r, r')) \quad (\text{III.12a})$$

Im Unterschied zu (III.11a) haben wir jetzt vier verschiedene Symmetrisierungsstufen zu berücksichtigen, da auch die Ausgangskonfiguration des $^{20}\text{Ne} - ^{12}\text{C}$ - Systems einen nichtlokalen Beitrag liefert.

$$K_{3p}^{\kappa\lambda'}(r, r') = \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu_1} \left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} - \frac{\ell_\kappa(\ell_\kappa+1)}{r^2} \right) - \epsilon_\kappa \right] \cdot \mathcal{D} \int \psi_\kappa^{I\ell_\kappa*}(\xi_i) \psi_{\lambda'}^{I\ell_{\lambda'}}(\eta_i^p) d^3\xi_i d^2\Omega_r d^2\Omega_{r'} \quad (\text{III.12b})$$

$$K_{4p}^{\kappa\lambda'}(r, r') =$$

$$\mathcal{D} \int \psi_\kappa^{I\ell_\kappa*}(\xi_i) V_{^{20}\text{Ne}-^{16}\text{O}}(r_i) \psi_{\lambda'}^{I\ell_{\lambda'}}(\eta_i^p) d^3\xi_i d^2\Omega_r d^2\Omega_{r'}$$

In Anhang A1 sind die Integralkerne K1 bis K4 ausführlich angegeben. Die Gleichungen (II.22) für $^{20}\text{Ne} - ^{12}\text{C}$ - Kanäle sehen so aus:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu_2} \left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} - \frac{\ell_\lambda(\ell_\lambda+1)}{r^2} \right) + V_{^{20}\text{Ne}-^{12}\text{C}}(r) - \epsilon_\lambda \right] R_\lambda^{I\ell_\lambda}(r) = - \sum_{\lambda'} G^{\lambda\lambda'}(r) R_{\lambda'}^{I\ell_{\lambda'}}(r) - \sum_{\kappa'} \int K^{\lambda\kappa'}(r, r') R_{\kappa'}^{I\ell_{\kappa'}}(r') dr' - \sum_{\lambda'} \int K^{\lambda\lambda'}(r, r') R_{\lambda'}^{I\ell_{\lambda'}}(r') dr' \quad (\text{III.13})$$

mit

$$K^{\lambda\kappa'}(r, r') = \sum_{\mathcal{G}=1}^4 (K_{5\mathcal{G}}^{\lambda\kappa'}(r, r') + K_{6\mathcal{G}}^{\lambda\kappa'}(r, r'))$$

und

(III.14)

$$K^{\lambda\lambda'}(r, r') = \sum_{\mathcal{P}=2}^4 (K_{7\mathcal{P}}^{\lambda\lambda'}(r, r') + K_{8\mathcal{P}}^{\lambda\lambda'}(r, r'))$$

Hier nimmt $\mathcal{G}$ vier verschiedene Werte an und $\mathcal{P}$ nur die drei von der Ausgangskonfiguration verschiedenen. ($\mathcal{D}_i = \{\vec{r}_{i1}, \vec{r}_{i2}, \vec{r}_{i3}\}$)

$$K_{5\mathcal{G}}^{\lambda\kappa'}(r, r') = \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu_2} \left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} - \frac{\ell_1(\ell_1+1)}{r^2} \right) - \varepsilon_\lambda \right] \times$$

$$D \int \psi_\lambda^{I\ell_1*}(\eta_i) \psi_{\kappa'}^{I\ell_{\kappa'}}(\xi_i^{\mathcal{G}}) d^3\eta_1 d^2\Omega_r d^2\Omega_{r\mathcal{G}}$$

$$K_{6\mathcal{G}}^{\lambda\kappa'}(r, r') =$$

$$D \int \psi_\lambda^{I\ell_1*}(\eta_i) V_{\omega_{Ne-12C}}(\mathcal{D}_i) \psi_{\kappa'}^{I\ell_{\kappa'}}(\xi_i^{\mathcal{G}}) d^3\eta_1 d^2\Omega_r d^2\Omega_{r\mathcal{G}}$$

$$K_{7\mathcal{P}}^{\lambda\lambda'}(r, r') = \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu_2} \left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} - \frac{\ell_1(\ell_1+1)}{r^2} \right) - \varepsilon_\lambda \right] \times \quad (\text{III.15})$$

$$D \int \psi_\lambda^{I\ell_1*}(\eta_i) \psi_{\lambda'}^{I\ell_{\lambda'}}(\eta_i^{\mathcal{P}}) d^3\eta_1 d^2\Omega_r d^2\Omega_{r\mathcal{P}}$$

$$K_{8\mathcal{P}}^{\lambda\lambda'}(r, r') =$$

$$D \int \psi_\lambda^{I\ell_1*}(\eta_i) V_{\omega_{Ne-12C}}(\mathcal{D}_i) \psi_{\lambda'}^{I\ell_{\lambda'}}(\eta_i^{\mathcal{P}}) d^3\eta_1 d^2\Omega_r d^2\Omega_{r\mathcal{P}}$$

Wie schon erwähnt, werden wir im weiteren die Integralkerne $K_1 \dots K_8$ explizit berechnen.

IV. Die Winkelintegrationen

Unter Berücksichtigung der im vorigen Kapitel gemachten Annahme, daß alle Cluster im Grundzustand sind, können wir die Kanalfunktionen (III.5) und (III.6) erheblich vereinfachen, insbesondere brechen die Summen über die Zwischendrehimpulse zusammen:

$$\Psi_{12-34}^{I,\kappa} = \sum_M X_{1,2,3,4}^{0,0} \cdot \left[\left[\varphi_{12}^{\ell_{12}}(\vec{r}_{12}) \otimes \varphi_{34}^{\ell_{34}}(\vec{r}_{34}) \right] \otimes Y_{12-34}^{\ell}(\hat{r}_{12-34}) \right]_M^{I,\kappa} \quad (\text{IV.1})$$

für $^{16}\text{O} - ^{16}\text{O}$ - Kanäle. Im Falle der Neon - Kohlenstoff-Konfiguration lautet die Kanalfunktion:

$$\Psi_{123-4}^{I,\lambda} = \sum_M X_{1,2,3,4}^{0,0} \cdot \left[\left[\tilde{\varphi}_{12}^{\tilde{\ell}_{12}}(\vec{r}_{12}) \otimes \varphi_{12-3}^{\ell_{12-3}}(\vec{r}_{12-3}) \right] \otimes Y_{123-4}^{\tilde{\ell}}(\hat{r}_{123-4}) \right]_M^{I,\lambda} \quad (\text{IV.2})$$

Die Integration über die intrinsischen Clusterkoordinaten ergibt hier stets eins. Wir betrachten zunächst die Integrale in $K_1^{\kappa\kappa'}$, $K_3^{\kappa\lambda'}$, $K_5^{\lambda\kappa'}$ und $K_7^{\lambda\lambda'}$. Sie sind alle vom Typ: +)

$$\mathcal{J} = \int \Psi_{(\vec{r}_{12}, \vec{r}_{34}, \Omega_{12-34})}^{I\kappa*} \Psi_{(\vec{r}_{12}, \vec{r}_{24}, \Omega_{12-24})}^{I\kappa'} d\vec{r}_{12} d^2\Omega_{12-34} d^2\Omega_{12-24} \quad (\text{IV.3})$$

+) Das Wigner - Eckart - Theorem ²⁷⁾ liefert für das Matrixelement eines Tensoroperators:

$$\langle I' M' \kappa' | T_m^{\ell} | I M \kappa \rangle = (-)^{I'-M'} \begin{pmatrix} I' & \ell & I \\ M' & m & M \end{pmatrix} \langle I' \kappa' || T^{[\ell]} || I \kappa \rangle$$

Für $\ell = 0$, also Überlappintegrale und Matrixelemente mit skalaren Potentialen folgt demnach M-Unabhängigkeit:

$$\langle I' M' \kappa' | T_0^0 | I M \kappa \rangle = \frac{1}{I} \delta_{I'I} \delta_{M'M} \langle I' \kappa' || T^{[0]} || I \kappa \rangle$$

$$= \frac{1}{I} \int \left[\left[\left[\varphi_{(\vec{r}_{12})}^{\ell_{12}} \otimes \varphi_{(\vec{r}_{34})}^{\ell_{34}} \right]^{J, \kappa} \otimes Y_{(\Omega_{12-34})}^{\ell} \right]^{I, \kappa} \otimes \left[\left[\varphi_{(\vec{r}_{13})}^{\ell'_{12}} \otimes \varphi_{(\vec{r}_{24})}^{\ell'_{34}} \right]^{J', \kappa'} \otimes Y_{(\Omega_{13-24})}^{\ell'} \right]^{I, \kappa'} \right]^0 \quad (IV.3)$$

$$d^3 \vec{r}_{12} d^2 \Omega_{12-34} d^2 \Omega_{13-24}$$

Es treten sechs Vektoren auf, von denen wir drei als Basis wählen; die anderen werden als Linearkombination geschrieben: $\vec{q}_1 = \vec{r}_{12}$ $\vec{q}_2 = \vec{r}_{12-34}$ $\vec{q}_3 = \vec{r}_{13-24}$

$$\rightarrow \vec{r}_{34} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \vec{q}_i; \quad \vec{r}_{13} = \sum_{i=1}^3 \beta_i \vec{q}_i; \quad \vec{r}_{24} = \sum_{i=1}^3 \gamma_i \vec{q}_i.$$

Um die Winkelintegrale ausführen zu können, müssen wir die von zusammengesetzten Koordinaten abhängigen Funktionen in folgender Weise faktorisieren:

$$\varphi(\sum \alpha_i \vec{q}_i) \sim \sum f(\alpha_1 q_1, \alpha_2 q_2, \alpha_3 q_3) Y(\hat{q}_1) Y(\hat{q}_2) Y(\hat{q}_3) \quad (IV.4)$$

Dies geschieht mit Hilfe der dreidimensionalen Fourier-Transformation:

$$\varphi_{\ell m}(\sum \alpha_i \vec{q}_i) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int e^{i \vec{k} (\sum \alpha_i \vec{q}_i)} f_{\ell m}(\vec{k}) d^3 \vec{k} \quad (IV.5)$$

$$\text{mit} \quad f_{\ell m}(\vec{k}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}'} \varphi_{\ell m}(\vec{r}') d^3 \vec{r}'$$

Die Exponentialfunktion wird in Faktoren aufgespalten und jeder einzelne in Partialwellen zerlegt:

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 4\pi \sum_{\lambda\mu} i^\lambda j_\lambda(kr) Y_{\lambda\mu}^*(\hat{k}) Y_{\lambda\mu}(\hat{r}) \quad (\text{IV.6})$$

Wir erhalten schließlich mit elementaren Methoden der Drehimpulsalgebra ²⁷⁾:

$$\varphi_{lm}^{\kappa}(\vec{\alpha}, \vec{q}; i) = 4\sqrt{\pi} \sum_{\ell_1 \ell_2 \ell_3} g_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{\ell, \kappa}(\alpha_1 q_1, \alpha_2 q_2, \alpha_3 q_3) \quad (\text{IV.7})$$

$$\times \sum_{\lambda} D_{\ell_1 \ell_2 \ell_3 \lambda}^{\ell} \left[\left[Y_{(\vec{q}_1)}^{\ell_1} \otimes Y_{(\vec{q}_2)}^{\ell_2} \right]^{\lambda} \otimes Y_{(\vec{q}_3)}^{\ell_3} \right]_m^{\ell}$$

g ist eine faktorisierte Funktion, die von den Beträgen der Argumentvektoren abhängt:

$$g_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{\ell, \kappa}(\alpha_1 q_1, \alpha_2 q_2, \alpha_3 q_3) = i^{\ell_1 + \ell_2 + \ell_3} \int_0^{\infty} f_{\ell}^{\kappa}(k) j_{\ell_1}(\alpha_1 k q_1) j_{\ell_2}(\alpha_2 k q_2) j_{\ell_3}(\alpha_3 k q_3) k^2 dk \quad (\text{IV.8})$$

Mit dieser Funktion werden wir uns später noch ausführlich befassen. Die Koeffizienten D haben die Gestalt:

$$D_{\ell_1 \ell_2 \ell_3 \lambda}^{\ell} = \hat{\ell}_1 \hat{\ell}_2 \hat{\ell}_3 \hat{\lambda} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \ell_3 & \ell \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.9})$$

so daß das Integral $\mathcal{J}$ schließlich folgende Form annimmt:

$$\mathcal{J} = \frac{(32\pi)^{3/2}}{\hat{1}} \sum_{\ell_1 \dots \ell_9} \int g_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{\ell_{34}}(\alpha_i q_i) g_{\ell_4 \ell_5 \ell_6}^{\ell'_{12}}(\beta_i q_i) \times g_{\ell_7 \ell_8 \ell_9}^{\ell'_{34}}(\gamma_i q_i) \varphi_{(\vec{q}_1)}^{\ell_{12}} q_1^2 dq_1 \times \quad (\text{IV.10})$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} D_{\ell_1 \ell_2 \ell_3 \lambda_1}^{\ell_{34}} D_{\ell_4 \ell_5 \ell_6 \lambda_2}^{\ell_{12}} D_{\ell_7 \ell_8 \ell_9 \lambda_3}^{\ell_{34}} \cdot \\
 & \cdot \int \left[\left[\left[Y_{(\hat{q}_1)}^{\ell_{12}} \otimes \left[Y_{(\hat{q}_1)}^{\ell_1} \otimes Y_{(\hat{q}_2)}^{\ell_2} \right]^{\lambda_1} \cdot Y_{(\hat{q}_3)}^{\ell_3} \right]^{\ell_{34}} \right]^{\tilde{J}} \otimes Y_{(\hat{q}_2)}^{\ell_{12-34}} \right]^I \otimes \\
 & \left[\left[\left[\left[Y_{(\hat{q}_1)}^{\ell_4} \otimes Y_{(\hat{q}_2)}^{\ell_5} \right]^{\lambda_2} \cdot Y_{(\hat{q}_3)}^{\ell_6} \right]^{\ell_{12}} \otimes \left[\left[Y_{(\hat{q}_1)}^{\ell_7} \otimes Y_{(\hat{q}_2)}^{\ell_8} \right]^{\lambda_3} \cdot Y_{(\hat{q}_3)}^{\ell_9} \right]^{\ell_{34}} \right]^{\tilde{J}} \otimes Y_{(\hat{q}_3)}^{\ell_{12-24}} \right]^I \right]^0 \\
 & \cdot d^2 \Omega_1 d^2 \Omega_2 d^2 \Omega_3
 \end{aligned} \tag{IV.10}$$

In Anhang A2 wird das Winkelintegral explizit ausgewertet. Es ist eine Summe über Zwischendrehimpulse Λ_i von 3-j- , 6-j- und 9-j- Symbolen.

Gemäß den Ausführungen in Kapitel III setzt sich das ^{16}O - ^{16}O - Potential aus vier Anteilen V_{13} , V_{14} , V_{23} und V_{24} zusammen, das ^{20}Ne - ^{12}C - Potential aus drei Anteilen, V_{14} , V_{24} und V_{34} . Demzufolge zerfallen die Integralkerne $K_2^{\kappa\kappa'}$ und $K_4^{\kappa\lambda'}$ in jeweils vier Summanden, $K_6^{\lambda\kappa'}$ und $K_8^{\lambda\lambda'}$ in je drei. Der zu (IV.3) analoge Ausdruck ist dann:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}^V = & \int \Psi^{I\kappa*}(\vec{r}_{12}, \vec{r}_{34}, \hat{r}_{12-34}) V_{14}(\vec{r}_{14}) \cdot \\
 & \cdot \Psi^{I\kappa'}(\vec{r}_{13}, \vec{r}_{24}, \hat{r}_{13-24}) d^3 r_{12} d^2 \Omega_{12-34} d^2 \Omega_{13-24}
 \end{aligned} \tag{IV.11}$$

Die Faktorisierung von V liefert den Spezialfall von (IV.7) für $l = 0$:

$$V_{14}^{\circ}(\vec{r}_{14}) \equiv V_{14}^{\circ}\left(\sum_{i=1}^3 \delta_i \vec{q}_i\right) = 4\sqrt{2\pi} \sum_{\ell_{10}\ell_{11}\ell_{12}} \mathcal{V}_{\ell_{10}\ell_{11}\ell_{12}}^{(14)}(\delta_i q_i) \cdot$$

$$\times \hat{\ell}_{10} \hat{\ell}_{11} \hat{\ell}_{12} \begin{pmatrix} \ell_{10} & \ell_{11} & \ell_{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left[\left[Y_{(\hat{q}_1)}^{\ell_{10}} \otimes Y_{(\hat{q}_2)}^{\ell_{11}} \right]^{\ell_{12}} Y_{(\hat{q}_3)}^{\ell_{12}} \right]^{\circ} \quad (\text{IV.12})$$

Die (IV.10) entsprechende Form ist:

$$\mathcal{J}^V = \frac{(32\pi)^2}{\Gamma} \sum_{\ell_1 \dots \ell_{12}} \int g_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{\ell_{34}, \kappa}(\omega_i q_i) g_{\ell_4 \ell_5 \ell_6}^{\ell'_{12}, \kappa'}(\beta_i q_i) g_{\ell_7 \ell_8 \ell_9}^{\ell'_{34}, \kappa'}(\gamma_i q_i) \cdot$$

$$\times \mathcal{V}_{\ell_{10}\ell_{11}\ell_{12}}^{(14)}(\delta_i q_i) q_i^2 dq_i \cdot$$

$$\times \hat{\ell}_{10} \hat{\ell}_{11} \hat{\ell}_{12} \begin{pmatrix} \ell_{10} & \ell_{11} & \ell_{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} D_{\ell_1 \ell_2 \ell_3 \lambda_1}^{\ell_{34}} D_{\ell_4 \ell_5 \ell_6 \lambda_2}^{\ell'_{12}} D_{\ell_7 \ell_8 \ell_9 \lambda_3}^{\ell'_{34}} \cdot \quad (\text{IV.13})$$

$$\times \int \left[\left[\left[Y'_S \text{ zum Eingangskanal} \right]^I \otimes \left[Y'_S \text{ zum Ausgangskanal} \right]^I \right]^{\circ} \otimes \right.$$

$$\left. \otimes \left[\left[Y_{(\hat{q}_1)}^{\ell_{10}} \otimes Y_{(\hat{q}_2)}^{\ell_{11}} \right]^{\ell_{12}} \otimes Y_{(\hat{q}_3)}^{\ell_{12}} \right]^{\circ} \right]^{\circ} d^3\Omega_1 d^3\Omega_2 d^3\Omega_3$$

Auch dieses Winkelintegral ist in A3 behandelt.

Bevor wir die Radialteile aus (IV.10) und (IV.13) auswerten können, müssen präzise Modellannahmen für die gebundenen Cluster - Cluster - Relativwellenfunktionen und die Cluster - Cluster - Potentiale zwischen den streuenden Kernen gemacht werden. Dies geschieht in den folgenden beiden Kapiteln.

V. Die gebundenen Cluster - Cluster - Relativfunktionen

In unserem Modell tauchen gebundene Wellenfunktionen von $^{12}\text{C} + \alpha$ zum ^{16}O - Kern auf und ebenso $(^{12}\text{C} + \alpha) + \alpha$ zum ^{20}Ne - Kern. Unter der in dieser Arbeit gemachten Annahme, daß die Cluster stets im Grundzustand bleiben und auch ^{16}O als Core des ^{20}Ne - Kernes, werden die Zustände von ^{16}O und ^{20}Ne einzig durch die Relativbewegung des α - Teilchens im effektiven Zweikörperpotential $^{12}\text{C} - \alpha$ und $^{16}\text{O} - \alpha$ bestimmt.

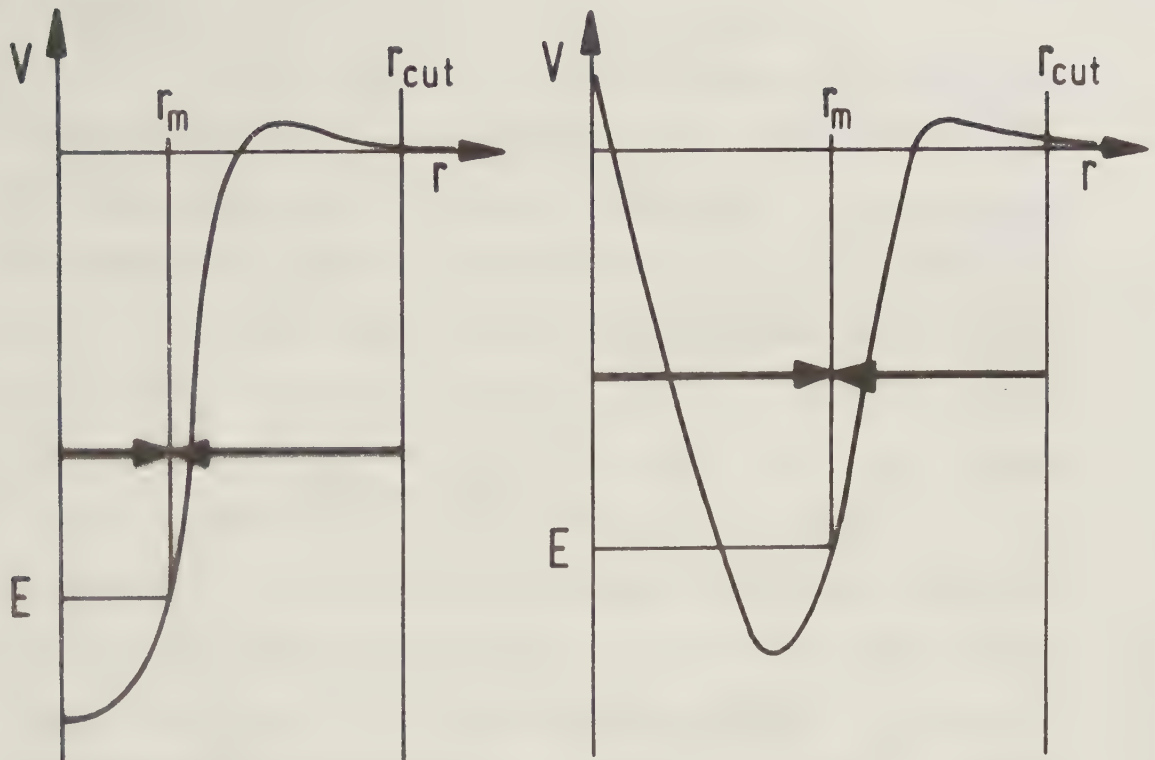
Für die Berechnung eines gebundenen Zustandes in einem Potential gibt es zunächst grundsätzlich zwei Wege: Entweder man hat ein unendliches harmonisches Oszillatorpotential oder einen Kasten und kann die Lösungen analytisch hinschreiben, oder man hat ein Potential in beliebiger Form, muß dann aber die Lösungen numerisch bestimmen. Dies geschieht durch Diagonalisation oder numerische Integration. Wir sind an einer realistischen Wellenfunktion interessiert, das heißt, Kasten- oder Oszillatorlösungen sind für uns zu schlecht; wir müssen also den numerischen Weg einschlagen. Da wir nur einzelne Zustände - die aber genau - bestimmen wollen, haben wir uns für die numerische Integration entschieden. Wir wollen kurz auf die Lösung dieses Problems eingehen.

Die Schrödinger - Gleichung mit Potential ist im Radialteil vom Typ:

$$R''(r) - A(r)R(r) = 0 \quad (\text{V.1})$$

Die Standard - Methode schreibt vor, bis zu einem Matchpunkt r_m von innen nach außen zu integrieren und vom Abschneideradius (wo die Wellenfunktion praktisch auf null abgefallen ist) von außen nach innen, ebenfalls bis r_m . Bedingung für einen gebundenen Zustand ist nun, daß bei r_m die Innen- und Außenlösung und ihre ersten Ableitungen ineinander übergehen. In Anhang A4 führen wir die verschiedenen Techniken hierzu im Detail vor ²⁸⁾. Wichtig bei diesem Verfahren ist die Zuverlässigkeit; man kennt ja meist weder die Energie noch die Anzahl der Zustände in dem Potential, das man gerade untersucht, und muß sicher sein, wirklich alle Eigenzustände zu finden. Bedeutungsvoll ist ferner eine Automatisierung der Wahl der Startwerte und des Match - Radius r_m , bei dem die Innen- und Außenlösungen angepaßt werden. Für alle von uns behandelten Fälle waren folgende Startwerte gut: $R(u) = 0$, $R'(u) = 10^{-6}$. Die Lösung ist recht unempfindlich gegen diese Wahl. Es hat sich als gut herausgestellt, für r_m den äußeren Schnittpunkt des Potentials mit der gerade untersuchten Energie zu wählen (s. Fig. (V.1)!) . Die Pfeile geben die jeweilige Integrationsrichtung an. Weiterhin haben wir gefunden, daß für unsere Potentiale bei ca. 750 Integrationsstützstellen die Energien mit einem relativen Fehler von 10^{-5} bestimmt werden können.

Eine technisch einfachere und elegantere Methode zur Eigenwertbestimmung, die von Krell und Ericson ²⁹⁾ entwickelt wurde, basiert auf folgendem Prinzip: Man integriert



Erläuterung zur Ermittlung des Match - Radius

Fig. (V.1)

von innen nach außen recht weit bis r_0 (im Idealfall bis unendlich) bei verschiedenen Energien und plottet den Wert der Wellenfunktion am Punkt r_0 $|R(r_0)|^2$ als Funktion der Energie. Bei der Eigenenergie E_0 findet man ein stark ausgeprägtes Minimum. In der Praxis nimmt man nicht $|R(r_0)|^2$ sondern eine modifizierte Funktion, bei der das Minimum erheblich verbreitert ist und so leichter gefunden werden kann. Trotzdem haben wir die Erfahrung gemacht, daß in den praktischen Rechnungen nicht alle Niveaus mit Sicherheit gefunden werden. So wurde hier, obwohl die Genauigkeit und Schnelligkeit der Krell - Ericson - Methode bestechen, der konventionelle Weg mit Innen- und Außenlösung gewählt.

Wir wenden uns zunächst dem ^{16}O - Kern zu:

In Fig (V.2) sind alle Zustände von ^{16}O mit Anregungsenergien bis 10 MeV sowie einige der höherliegenden aufgetragen ³⁰⁾. In der linken Spalte stehen Zustände, die gut kollektiv beschrieben werden können (so der 3^- - Oktupolzustand bei 6.13 MeV) oder als Teilchen - Loch - Zustände (z.B. der 2^- bei 8.87 MeV und 12.53 MeV als $(2p - 2h)$) oder als kohärente Addition von Teilchen + Loch - Zuständen, wobei die meisten Niveaus über 10 MeV weglassen sind, da sie hier nicht interessieren. In den beiden mittleren Spalten sind vermutete C - α - Rotationsbanden ³¹⁾ mit $K = 0^+$ bzw. 0^- eingetragen. Schalenmodellrechnungen liefern hier viel zu kleine α - Breiten, wohingegen eine C - α - Konfiguration wie in Fig (V.3) sehr gute Ergebnisse liefert. Die geringen Niveauabstände der 0^+ - Bande in der rechten Spalte deuten bereits ein enormes Trägheitsmoment dieser Konfiguration an. Die Annahme, daß es sich hier um eine 4 - α - Kette handelt (siehe Fig. (V.4)!), erklärt das Trägheitsmoment und ebenso die - Zerfallsbreiten ^{31,32,33)}.

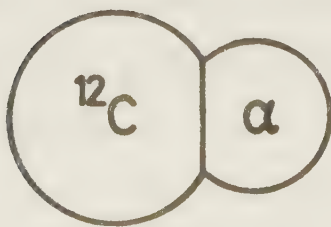


Fig. (V. 3)

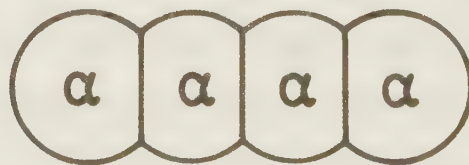


Fig. (V. 4)

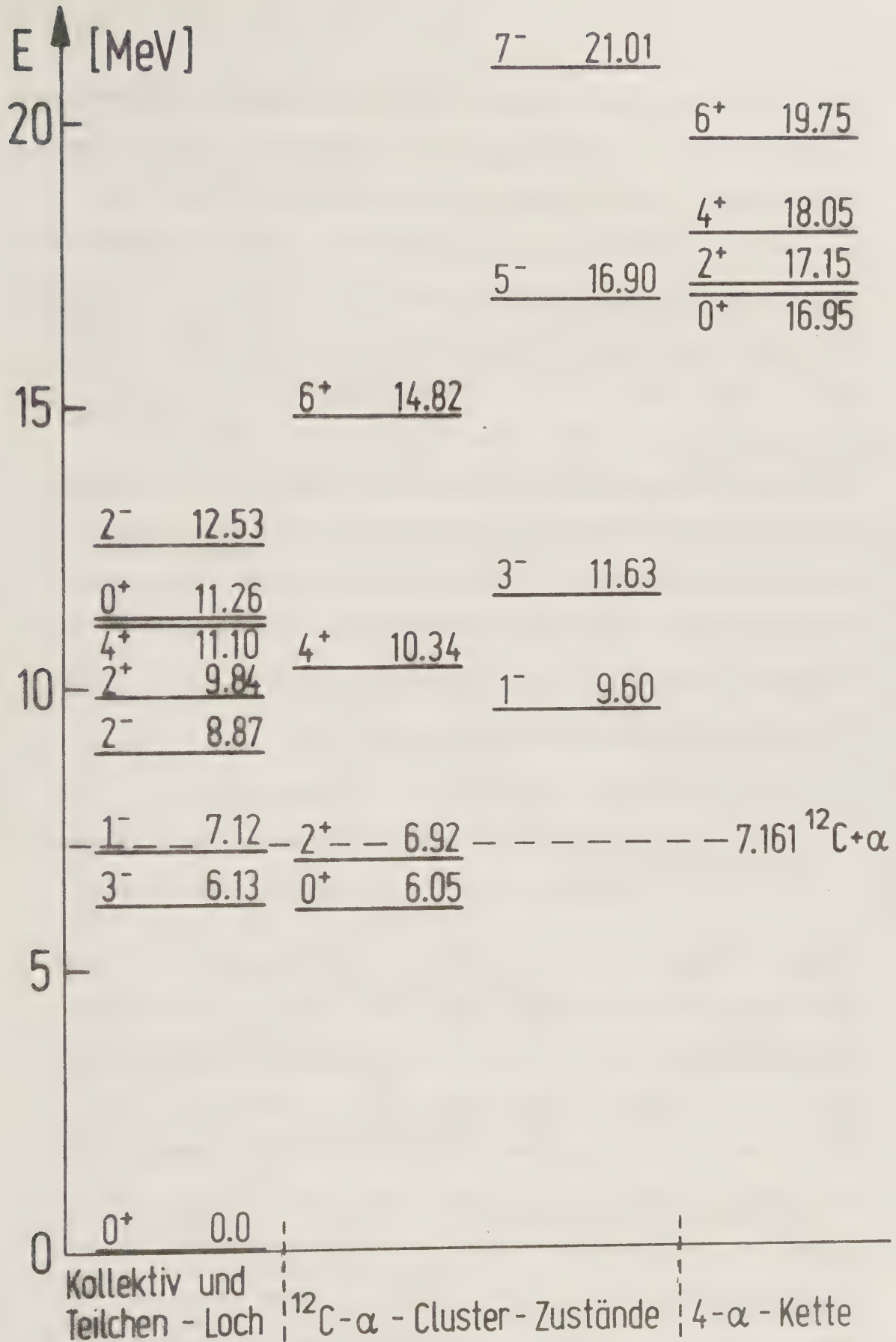


Fig. (V.2)

Zustände von ^{16}O , nach ihrem Charakter geordnet

Wir sind fürs erste nur am ^{16}O - Grundzustand im Rahmen eines $^{12}\text{C} - \alpha$ - Clustermodells interessiert. Da der Sauerstoffkern im Grundzustand nahezu sphärisch ist, muß ein effektives $^{12}\text{C} - \alpha$ - Potential ein Zentralminimum haben. Der erste 0^+ - Vibrationszustand liegt bei 11.26 MeV, das heißt, die Oszillatorkonstante ist festgelegt durch $\hbar\omega \cong 11$ MeV. Der 0^+ bei 6.05 MeV gehört zu einer anderen Konfiguration. Es wäre daher inkonsistent, ihn zur Bestimmung der Oszillatorkonstanten im Grundzustand heranzuziehen. Der niedrigste gebundene Zustand muß die α - Separationsenergie aus ^{16}O sein (-7.162 MeV). Ebenso ist das Potential asymptotisch festgelegt; es muß in das Coulomb - Potential $Z_1 Z_2 e^2 / r$ übergehen. Wir haben folgenden Ansatz gemacht:

$$V(r) = \begin{cases} -A + B r^2 & 0 \leq r \leq r_1 \\ +C - D (r - E)^2 & r_1 \leq r \leq r_2 \\ 12 e^2 / r & r_2 \leq r \end{cases} \quad (\text{V.2})$$

An den Stellen r_1 und r_2 wird Stetigkeit von $V(r)$ und der Ableitung dV/dr gefordert. Dies führt auf ein System von vier Gleichungen mit den sieben Unbekannten A, B, C, D, E, r_1 und r_2 . Die Separationsenergie und der zweite 0^+ - Zustand sowie die Kerngröße schränken den Wertebereich von A, B und r_2 erheblich ein, ohne sie jedoch völlig festzulegen, da der Oszillator eine endliche Tiefe hat. Innerhalb enger Grenzen variieren wir nun diese Parameter und bestimmen die Unbekannten. Mit den Potentialparametern:

$$\begin{aligned}
 A &= 20.745 \text{ MeV} & B &= 3.59 \text{ MeV} / \text{fm}^2 \\
 C &= 3.21 \text{ MeV} & D &= 1.146 \text{ MeV} / \text{fm}^2 & (V.3) \\
 E &= 5.25 \text{ fm} & r_1 &= 1.27 \text{ fm} & r_2 &= 5.5 \text{ fm}
 \end{aligned}$$

reproduzierten wir die α - Separationsenergie auf 1 keV genau. Potential und Radialfunktion sind in Fig. (V.5) abgebildet.

Das Spektrum des Ne - Kernes ³⁴⁾ in Banden geordnet nach ³⁵⁾ ist in Fig. (V.6) aufgeführt. Die unterste 0^+ - , 0^- - und 2^- - Bande sind von Hiura et al ³⁶⁾ im Rahmen eines ¹⁶O - Core plus α - Teilchen - Modells erklärt worden.

Wir sind wieder nur an der Grundbande interessiert. Um Information über den mittleren Zentrenabstand zwischen dem ¹⁶O - Core und dem α - Teilchen zu erhalten, haben wir das Quadrupolmoment zweier Kugelabschnitte (Fig. V.7) als Funktion des Zentrenabstandes berechnet. Dazu haben

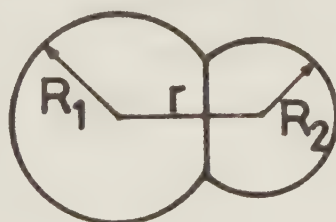


Fig. (V. 7)

wir den Radius des den ¹⁶O - Kern repräsentierenden Kugelabschnittes konstant auf $R_1 = r_0 \cdot 16^{1/3}$ fm mit $r_0 = 1.4$ fm gehalten und die Gesamtvolumenerhaltung durch Aufblähen des kleineren Fragments berücksichtigt. Diese Näherung

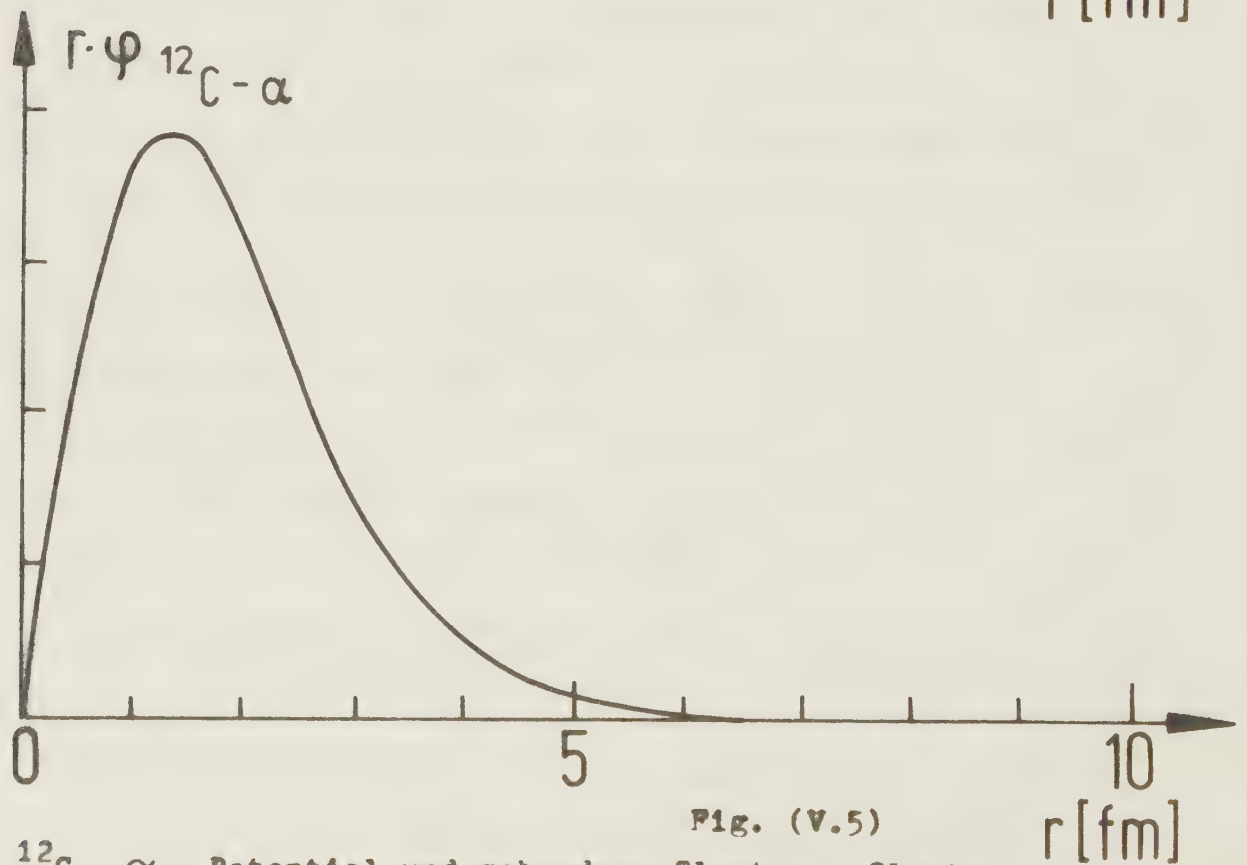
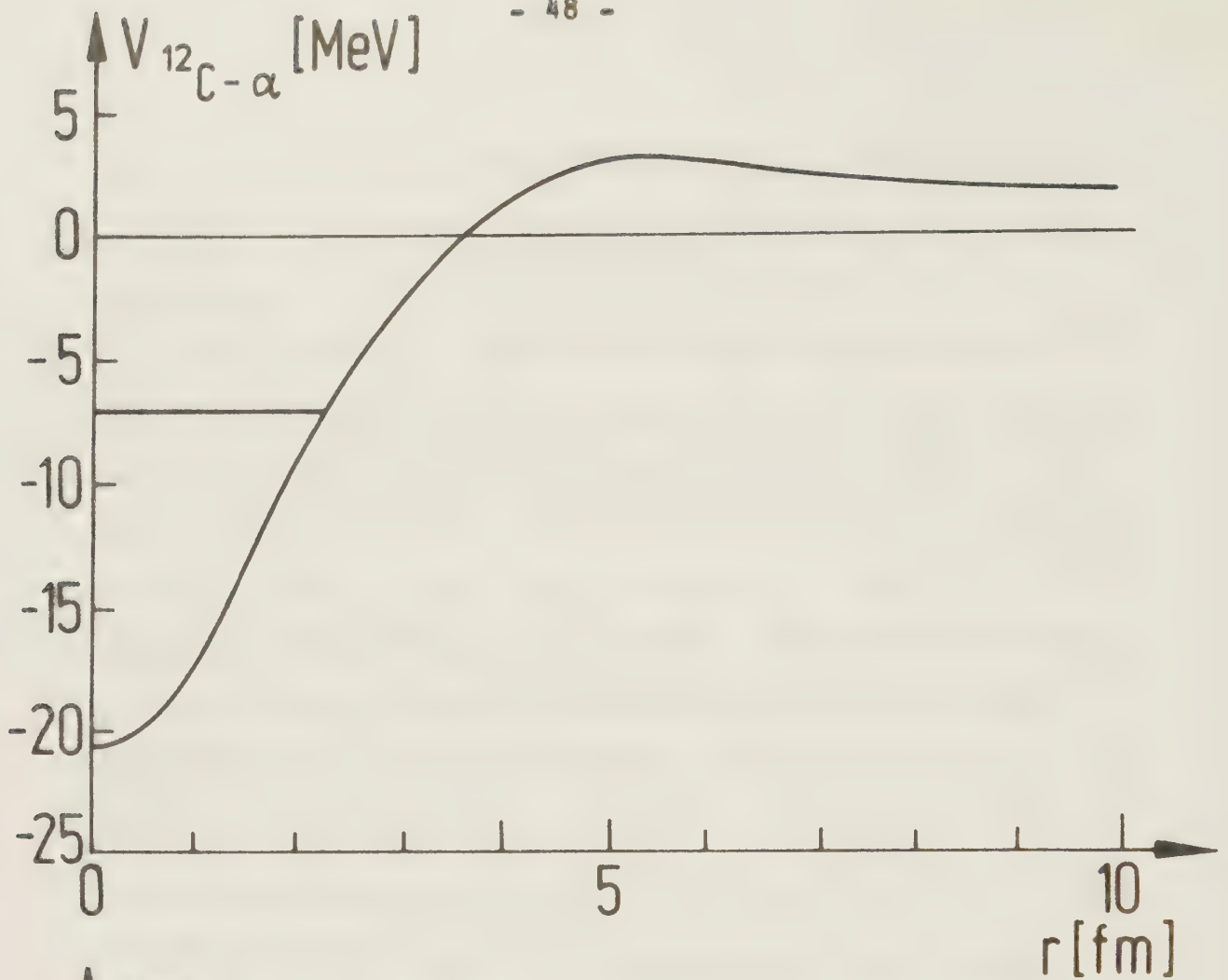


Fig. (V.5)

$^{12}\text{C} - \alpha$ - Potential und gebundene Cluster - Cluster-Relativfunktion zur Darstellung des ^{16}O - Grundzustandes.

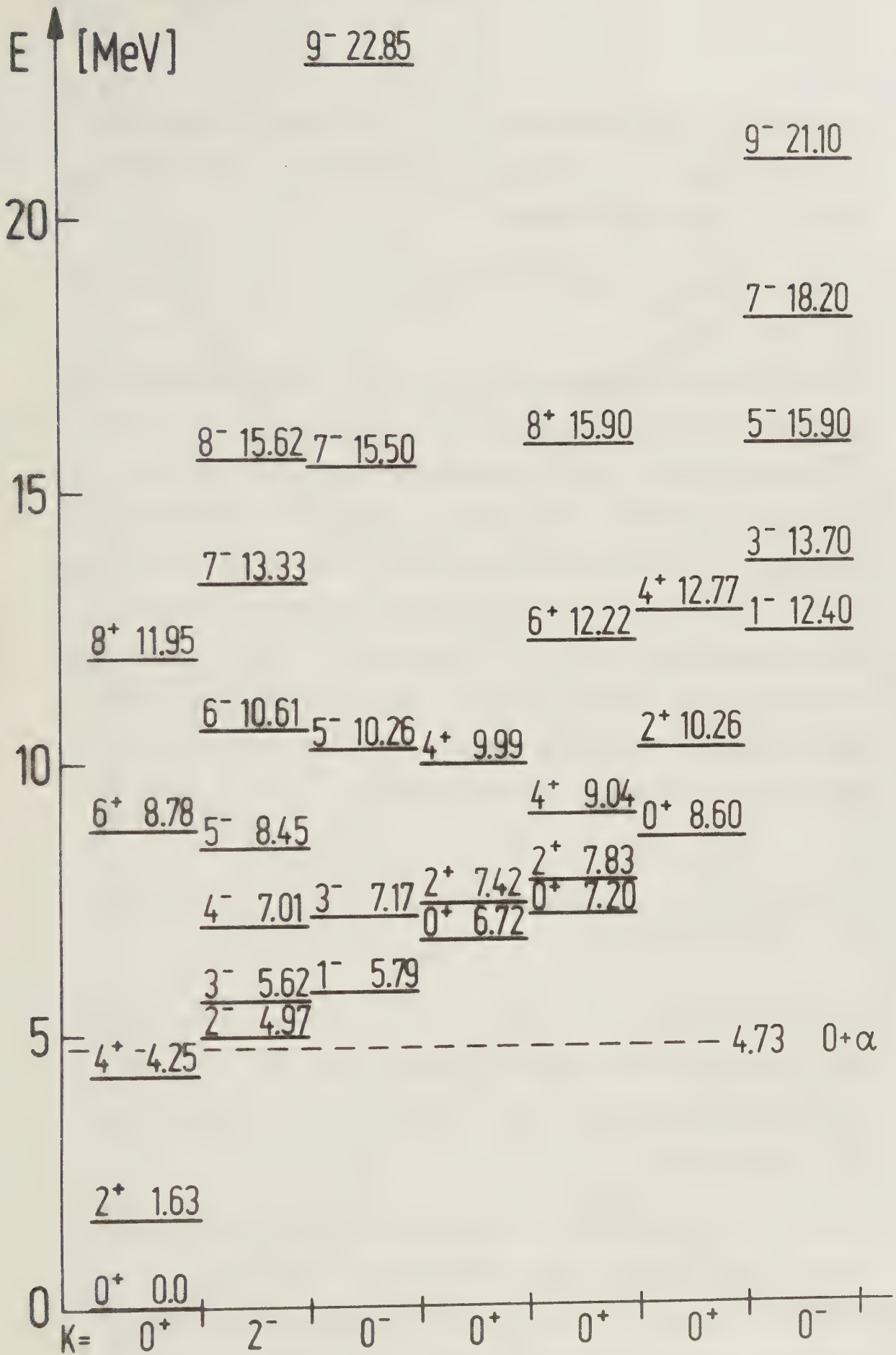


Fig. (V.6): ^{20}Ne - Zustände nach Banden sortiert.

ist gut für Zentrenabstände $r \geq 3$ fm. Das so ermittelte Quadrupolmoment ist mit dem aus dem $B(E2)$ - Wert errechneten ³⁷⁾ verglichen worden :

$$B(E2) \quad 2_1^+ \rightarrow 0_{gs}^+ = (480 \pm 90) \text{ fm}^4 \rightsquigarrow Q_0 = (69 \pm 6) \text{ fm}^2 \quad (V.4)$$

Für $r = 4$ fm erhielten wir $Q_0 = 67 \text{ fm}^2$. Der Abstand von vier Fermi stimmt auch mit Überlegungen von Hiura et al ³⁶⁾ überein und liefert einen guten rms - Radius. Die Tiefe des Potentials ist wieder durch die α - Separationsenergie $E = 4.730$ MeV bestimmt. Die Krümmung in der Umgebung des Minimums wird durch die Energie des zweiten 0^+ - Zustandes ($E = 6.72$ MeV) gegeben. Da ^{20}Ne in der Grundbande kein starrer Rotator ist, haben wir die Potentiale drehimpulsabhängig gemacht. Getrennt für jeden Drehimpuls wurde folgender Ansatz gemacht:

$$V(r) = \begin{cases} -A + B(r - C)^2 & 0 \leq r \leq r_1 \\ D - E(r - F)^2 & r_1 \leq r \leq r_2 \\ 16 e^2 / r & r_2 \leq r \end{cases} \quad (V.5)$$

Die Lösung wurde wie im ^{16}O - Fall erhalten. In Fig. (V.8) sind Potentiale und Wellenfunktionen für ^{20}Ne 0_{gs}^+ , $2_{1.63}^+$, und $4_{4.25}^+$ abgebildet. Die Potentialparameter sind in Tab. (V.1) aufgeführt.

Auffällig ist die starke Zustandsabhängigkeit der Potentiale, eine Tatsache, die sich auch aus anderen α - Cluster - Rechnungen (so z.B. für ^8Be) ergibt. Sie trägt der starken Abweichung des Kernes vom starren Rotator

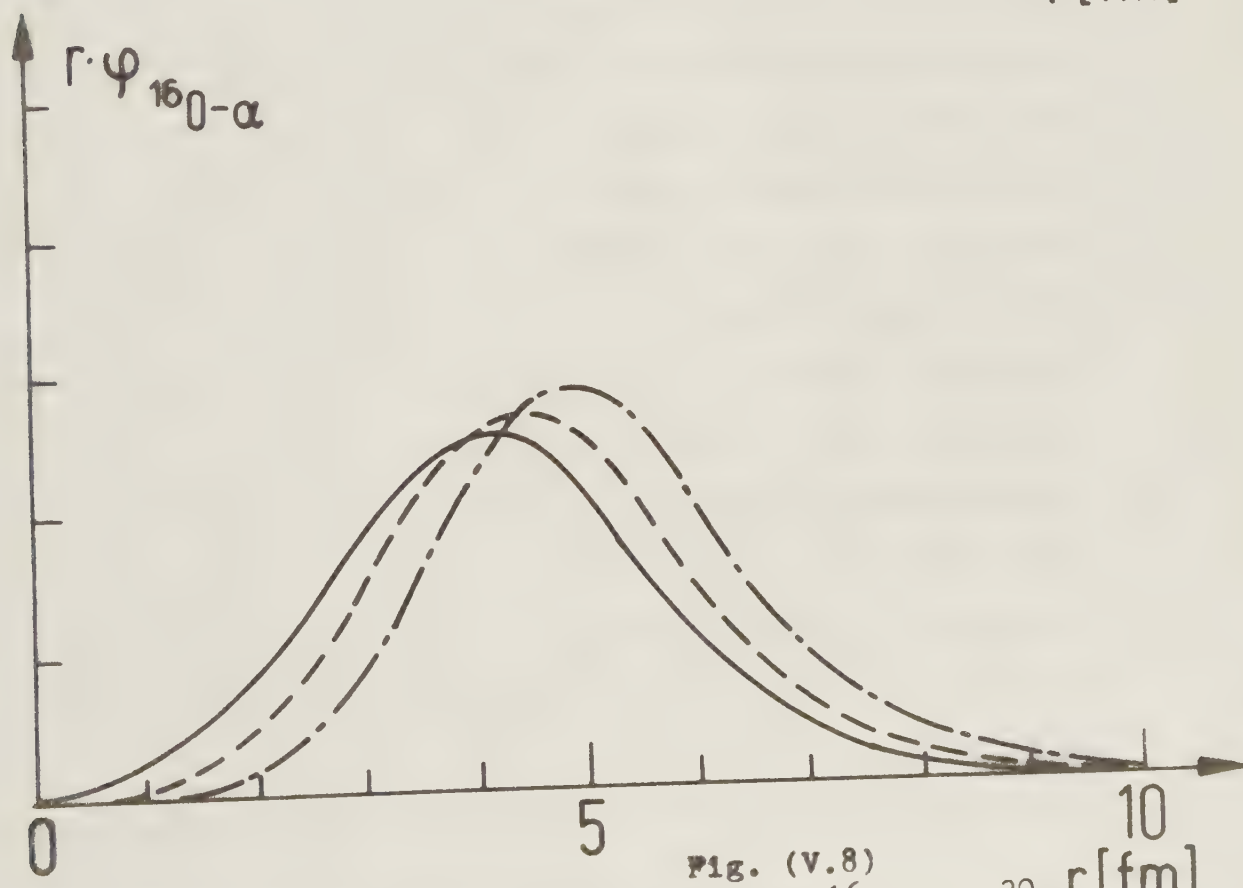
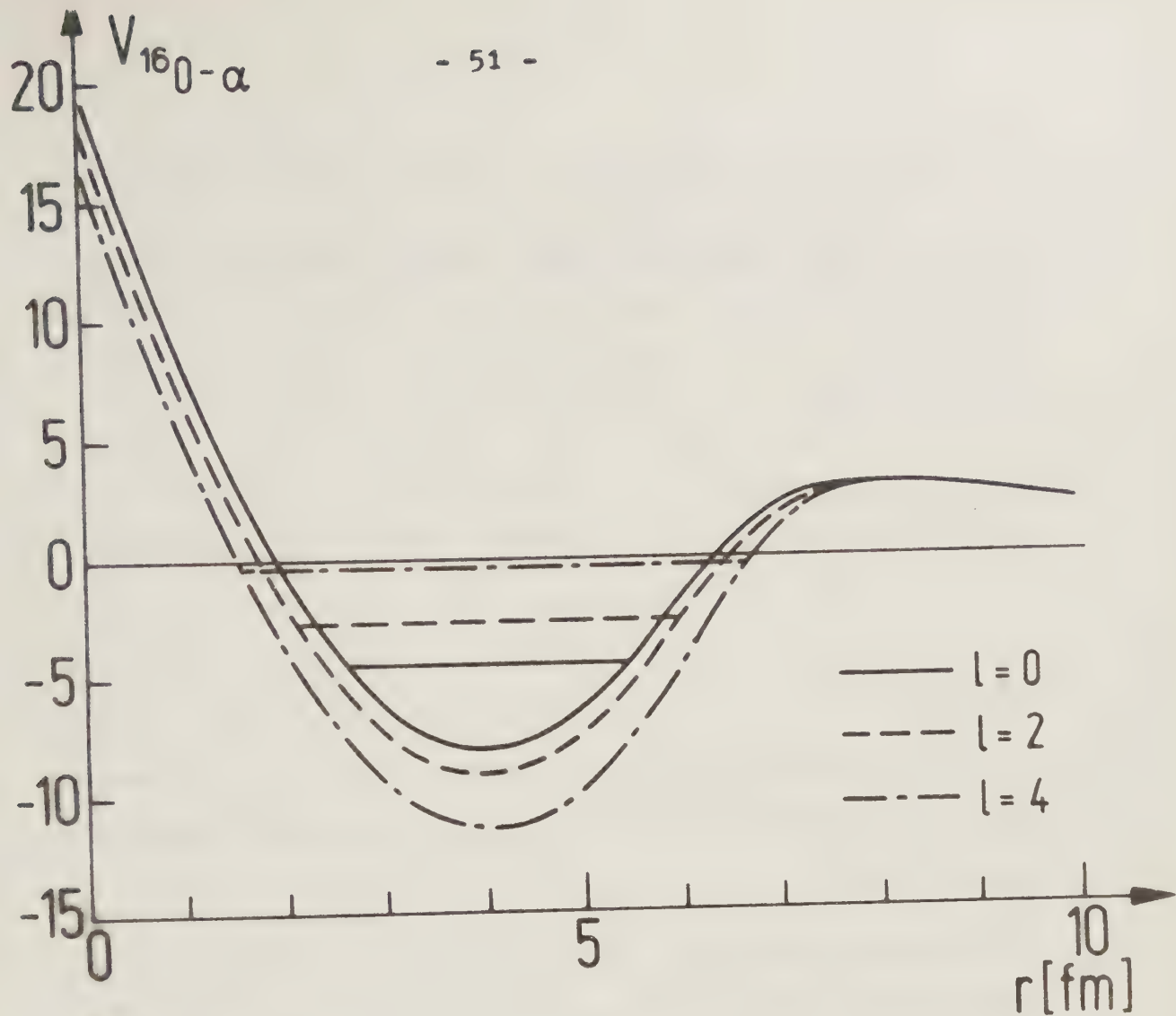


Fig. (V.8)
Potential und geb. Relativfunktionen für $^{16}\text{O}-\alpha$ zu ^{20}Ne

	A <MeV>	B <MeV/fm ² >	C <fm>	D <MeV>	E <MeV/fm ² >	F <fm>	r ₁ <fm>	r ₂ <fm>
0 ⁺ g.s.	8.05	1.75	4.00	2.91	1.27	7.86	5.62	8.00
2 ⁺ 1.63	9.07	1.75	4.00	2.90	1.46	7.88	5.76	8.00
4 ⁺ 4.25	11.27	1.75	4.00	2.90	1.97	7.91	6.07	8.00

Tab. (V.1)

Rechnung..

Es sei nochmals erwähnt, daß es uns hier darauf ankommt, den ¹⁶O - bzw. den ²⁰Ne - Kern durch ein grobes Cluster - Modell möglichst gut zu repräsentieren, um brauchbare, physikalisch plausible relative Cluster - Cluster - Wellenfunktionen zu gewinnen. Die Anzahl der Potentialparameter ist deshalb schon wegen unserer Zielrichtung völlig irrelevant; wir benötigen die Potentiale später nicht mehr. Was wir von den gebundenen Zuständen später noch benötigen, sind die Eigenenergien und die gebundenen Relativwellenfunktionen. Als effektive Wechselwirkungen zwischen Clustern aus verschiedenen Kernen bei der Streuung können wir sie nicht nehmen, sie sind viel zu stark zustandsabhängig; andererseits sind die Energien der Niveaus, die wir aus optischen Cluster - Cluster - Potentialen der Streuung erhalten viel zu ungenau. Wir müssen daher das gebundene und das Streu - Problem getrennt behandeln.

VI. Die Cluster - Cluster - Potentiale im Kontinuum

In den Integralkernen der gekoppelten Gleichungen (III.10) und (III.13) tauchen folgende Cluster - Cluster - Potentiale explizit auf:

$$V_{12C-12C}, \quad V_{12C-\alpha}, \quad V_{\alpha-\alpha}.$$

Bei gebundenen Cluster - Cluster - Zuständen hat man eine Anzahl eindeutiger, die Modelle beschränkender Daten: Energieniveaus, Radien, Quadrupolmomente, Separationsenergien, Zerfallsbreiten in bestimmte Kanäle etc. Und wie wir im vorigen Kapitel gesehen haben, gibt es auch dort eine ganze Vielfalt von koexistierenden Modellen.

Hier, bei Streuzuständen, ist die Lage noch erheblich verzwickter: Die experimentelle Information, Anregungsfunktionen und Winkelverteilungen für elastische Streuung und Reaktionskanäle, enthält stets die vollständige Reaktionskinematik und -dynamik, für die der Physiker in der Regel nur näherungsweise Modellannahmen machen kann. Dies führt dazu, daß ein Teil der Information, die man sich durch das Modell erhofft, bei seiner Aufstellung hineingesteckt werden muß. Die Ergebnisse sind also in stärkerem Maße subjektiv als in vielen anderen Bereichen der Physik. Es gibt eine Reihe recht erfolgreicher Verfahren, Streupotentiale zu berechnen³⁸⁻⁴⁰⁾; die Ergebnisse sind jedoch, obwohl die Streudaten gut reproduziert werden, untereinander kaum vergleichbar.

Bei den makroskopischen optischen Modellen für eine ef-

fektive Wechselwirkung wird dieses Dilemma mit der Subjektivität am deutlichsten. Wir betrachten, um die Problematik transparent zu machen, den Fall der elastischen Streuung von Kern A an Kern B. Den Coulomb - Anteil des Potentials können wir rausziehen, er ist bekannt und das Coulomb - Problem hat man recht gut im Griff. Das Potential setzt attraktiv ein bei ungefähr $r = r_A + r_B + 2.7 \text{ fm}$, dem Abstand, bei dem die Kernkräfte spürbar werden. Die Erfahrung sowie physikalische Plausibilität sagt, daß, je größer der Überlapp zwischen den Kernen wird, die Wahrscheinlichkeit für eine Reaktion umso größer ist. Der Teil des einfallenden Stroms, der in Reaktionkanäle führt, ist jedoch für den elastischen Wirkungsquerschnitt verloren; er wird aus dem elastischen Kanal absorbiert. Dies besorgt ein Imaginärteil im optischen Potential, der im Bereich geringen Überlapps der beiden Kerne zunächst schwach einsetzt, nach innen zu (d.h. bei stärkerem Überlapp) jedoch rasch stärker wird und bei Überdeckung der Kerne praktisch alles absorbiert.

Wir werden also erwarten, daß die Streuquerschnitte nur schwach oder gar nicht davon abhängen, wie das reelle Potential bei kleinen Abständen aussieht, sondern von dem Bereich, in dem der Kernkraftanteil des Potentials schon merklich von null verschieden ist, der Imaginärteil (der absorbiert) jedoch noch vernachlässigbar. Tatsächlich liefern Potentiale mit Zentralminimum, soft - core - und hard - core - Potentiale qualitativ gleichwertige Ergeb-

nisse, obwohl sie bei kleinen Abständen total unterschiedlich sind.

Wir sehen also, daß ein optisches Potential überhaupt nur in seiner Gesamtheit, Real- und Imaginärteil, Aussagekraft haben kann. In Fig. (VI.1) und Fig. (VI.2) sowie Tab. (VI.1) sind die Real- und Imaginärteile einiger $^{12}\text{C} - \alpha$ - Poten-

$^{12}\text{C} - \alpha$ - Potentiale

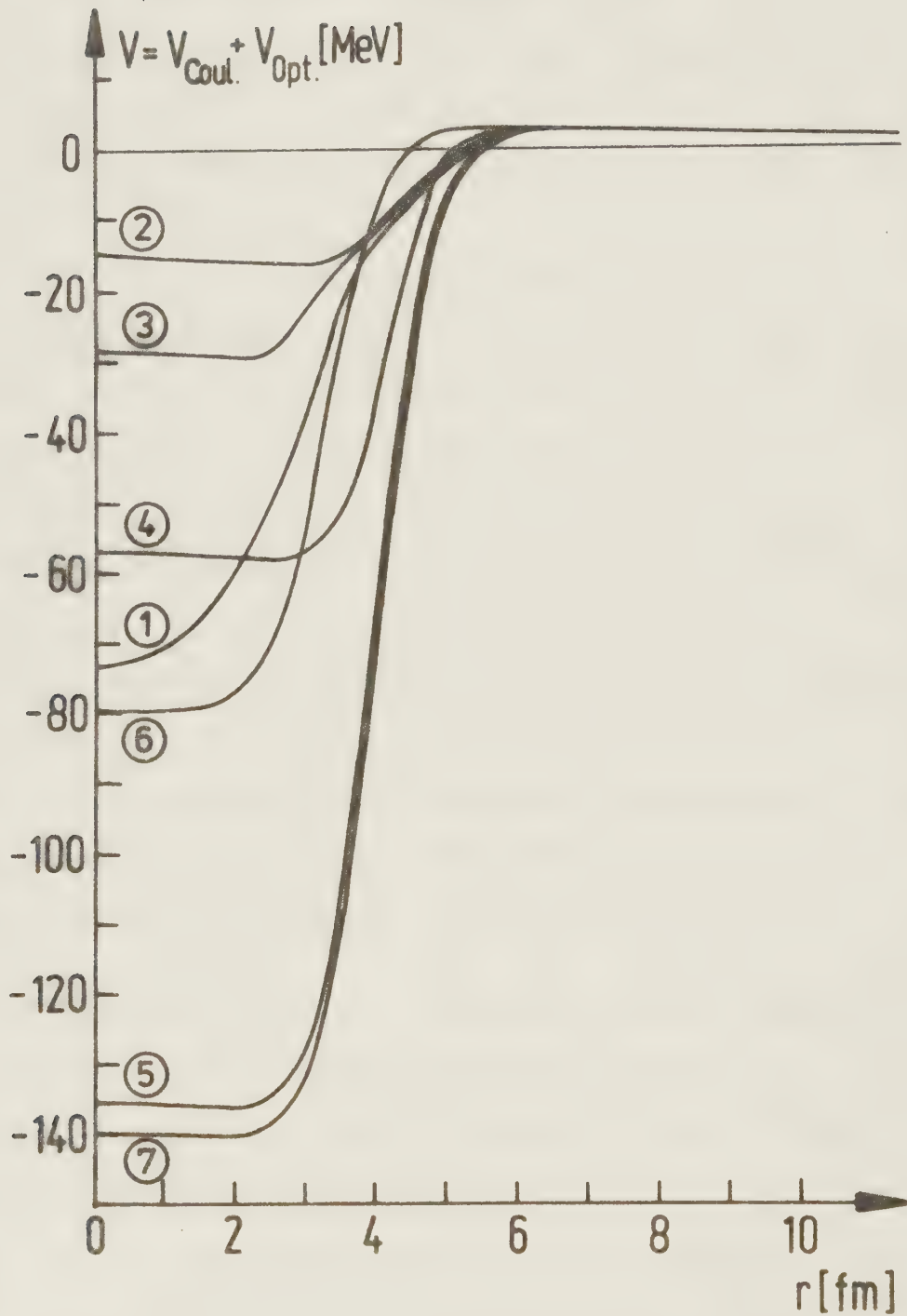
$$V = V_C - V(1 + \exp((r - r_R A^{1/3})/a_R))^{-1} - iW(1 + \exp((r - r_I A^{1/3})/a_I))^{-1}$$

V_C = homogen geladene Kugel mit Radius $R_C = r_C A^{1/3}$

E	V	r_R	a_R	W	r_I	a_I	r_C	ref.	lfd.
<MeV>	<MeV>	<fm>	<fm>	<MeV>	<fm>	<fm>	<fm>	nr.	nr.
166	85	1.34	.70	17.7	1.77	.52	1.3	41	1
	24	1.99	.42	13.0	1.99	.42		42	2
42	37.1	1.85	.45	13.3	1.85	.45		42	3
	31.5	2.00	.38	15.8	1.93	.25		42	
	66	1.80	.35	.003	1.80	.35		43	4
8.76	144.5	1.74	.38	0.03	1.74	.38		43	5
	88.6	1.42	.39	0.22	1.42	.39		43	6
9.33	148.8	1.74	.38	0.68	1.74	.38		43	7
	40.4	1.75	.50	16.3	1.75	.62	1.25	44	8
	115.8	1.50	.56	24.0	1.50	.40	1.25	44	9
56	151.9	1.24	.67	28.1	1.24	.64	1.25	44	10
	216.8	1.30	.58	28.1	1.50	.32	1.25	44	11

Tab. (VI.1)

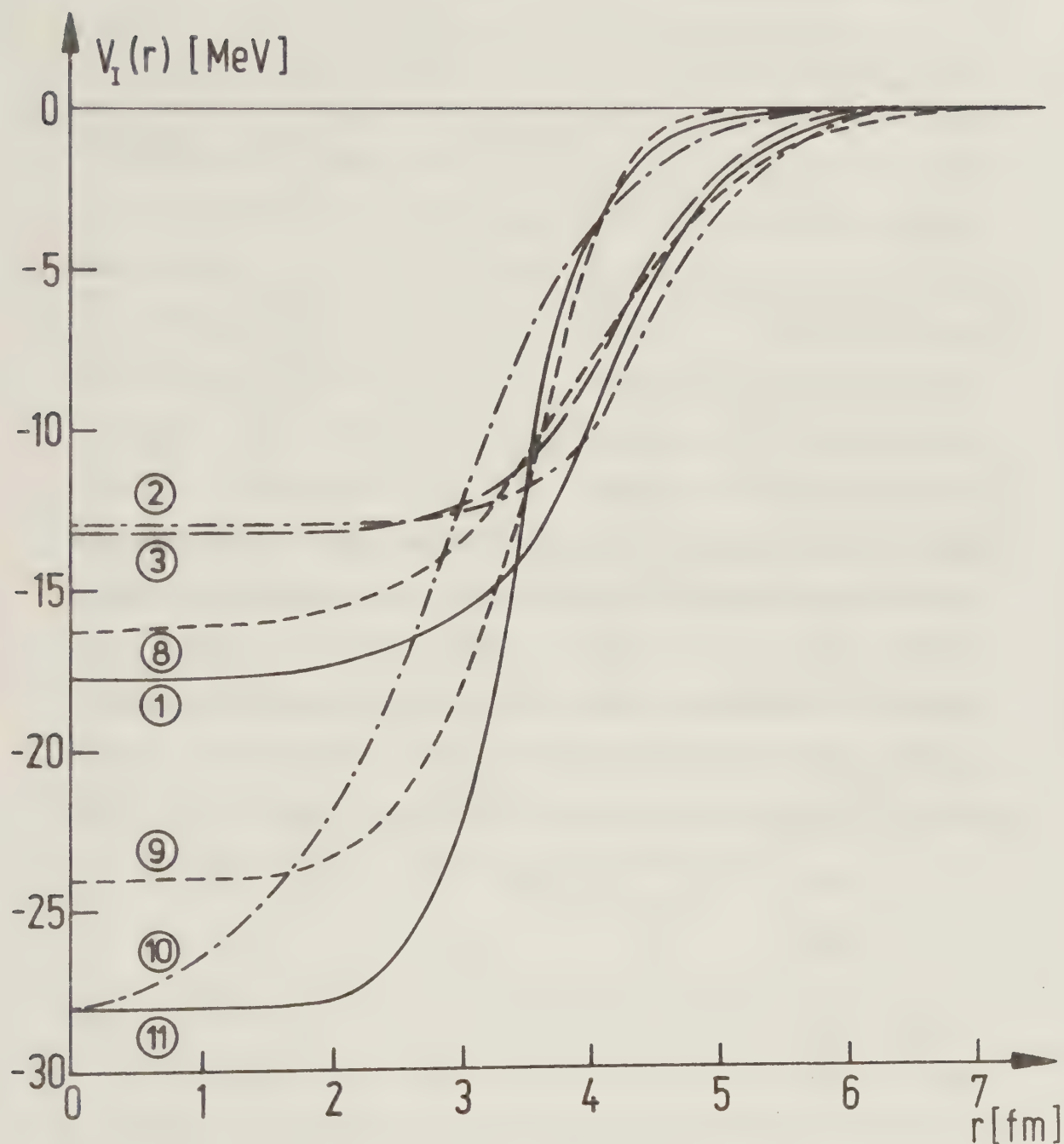
C- α -Potentiale
- Realteil -



Realteile verschiedener optischer Potentiale
für $^{12}\text{C} - \alpha$ - Streuung aus der Literatur.

Fig. VI. 1

C - α - Potentiale
- Imaginärteil -



Imaginärteile von optischen Potentialen für
 $^{12}\text{C} - \alpha$ - Streuung aus der Literatur.

Fig. VI. 2

tiale aus der Literatur ⁴¹⁻⁴⁴⁾ aufgezeigt. Obgleich sie einander so unähnlich zu sein scheinen, fitten sie doch die Daten recht gut.

Hier setzt nun unser spezielles Problem ein: Alle diese Potentiale sind an strenge Einkanalprobleme angepaßt, das heißt, alles, was nicht in den elastischen Kanal läuft, wird vom Imaginärteil aufgesogen. Dieser ist in der Regel Energie- bzw. Drehimpulsabhängig ⁴⁵⁾, da entsprechend den jeweiligen Q - Werten und Drehimpulsbilanzen die verschiedenen Reaktionskanäle bei verschiedenen Energien unterschiedlich stark angekoppelt sind. Wir wollen jedoch die starken Reaktionskanäle explizit beschreiben, unser Imaginärteil betrifft nur die von uns nicht berücksichtigten Reaktionskanäle, wird also einen anderen Verlauf haben wie die sonst bekannten. Wir halten es zudem für unsinnig, in allen Cluster - Cluster - Potentialen Imaginärteile zu berücksichtigen. Es ist hinreichend, die gesamte Absorption pauschal durch einen Imaginärteil in $V_{16O-16O}$ bzw. in $V_{20Ne-12C}$ bei (III.10) bzw. (III.13) darzustellen.

Da nun, wie eben erwähnt, die Radialteile allein nur Aussagekraft am Berührungspunkt haben, müssen wir uns nach zusätzlichen Auswahlkriterien für die Potentialparameter umsehen. Wir haben folgende Randbedingung gewählt: Alle Potentiale, $\alpha - \alpha$, $^{12}C - \alpha$ und $^{12}C - ^{12}C$, sollen durch feste Parameter und eine funktionale Abhängigkeit von A_1

und A_2 bestimmt werden. Wir sind der Meinung, daß stets nach Systematiken zu suchen ist und daß es wichtiger ist, ein Potential zu finden, das mehrere Systeme recht gut beschreibt, als für jedes System zusammenhanglos einen extra Parametersatz anzufitten. Wir wählen in Anlehnung an Bock und Yoshida ¹⁶⁾ folgendes Potential:

$$V = V_C - V_O \left(1 + \exp\left(\frac{r-R_O}{a}\right) \right)^{-1} \quad (\text{VI.1})$$

mit: V_C = Coulomb - Potential einer homogen geladenen Kugel mit Radius R_O

$$\begin{aligned} R_O &= r_O A^{1/3} & A &= A_1 + A_2 & a &= .52 \text{ fm} \\ r_O &= 1.25 (1 + 4/A) \text{ fm} & V_O &= 40 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Ebensogut wie diese rein phänomenologischen Potentiale ³⁸⁾ hätten wir auch semi-mikroskopische wie Scheid et al oder quasi - mikroskopische wie Morovic et al ³⁹⁾ nehmen können. Wir haben uns wegen des geringeren Aufwandes für die rein heuristischen Potentiale entschieden. In Tab. (VI.2) und Fig. (VI.3) sind das α - α -, das ^{12}C - α - und das ^{12}C - ^{12}C - Potential aufgeführt.

	V_O MeV	R_O fm	a fm
$\alpha - \alpha$	40	4.48	0.52
$^{12}\text{C} - \alpha$	40	4.85	0.52
$^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$	40	5.59	0.52

Tab. (VI.2)

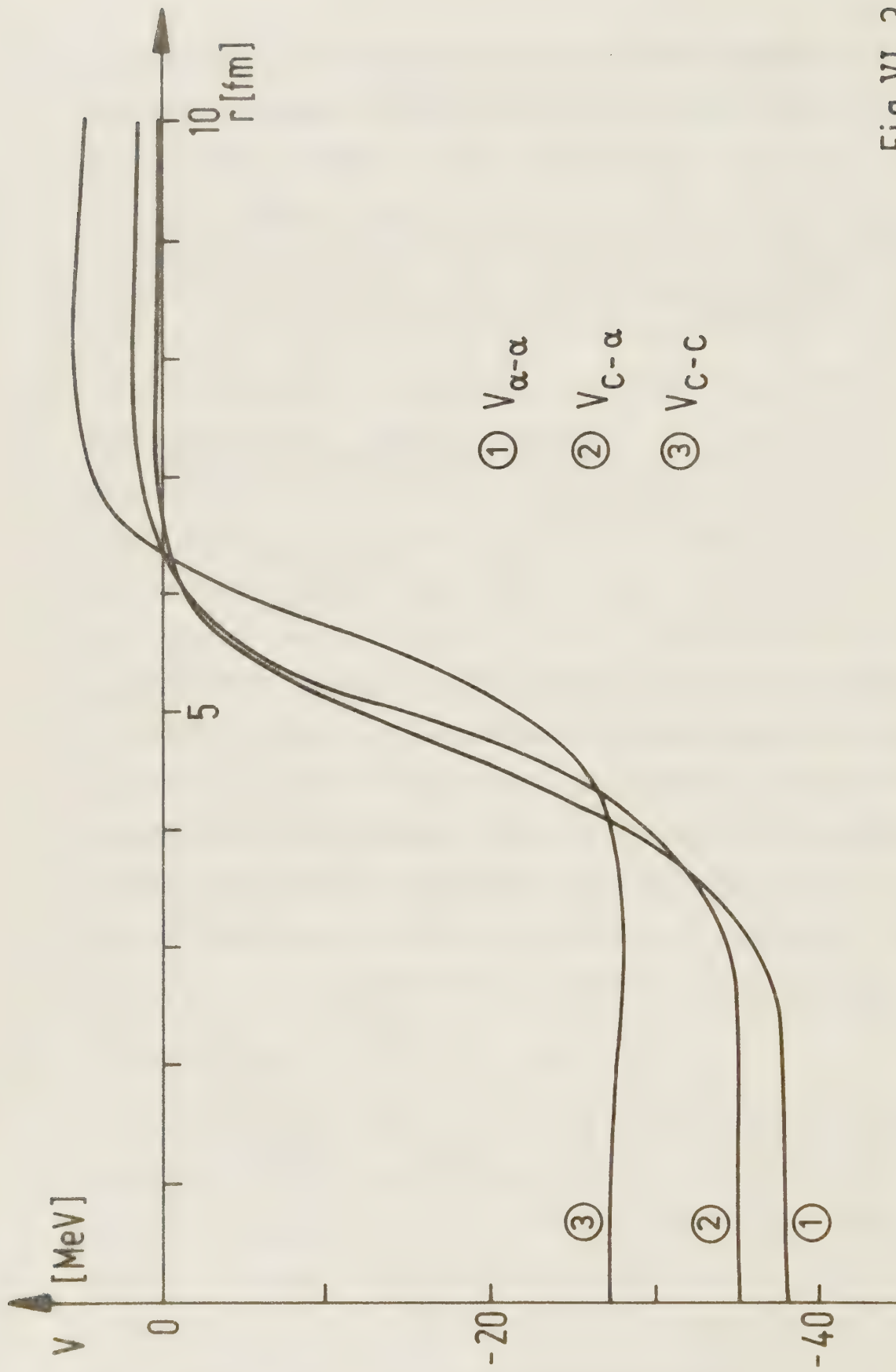


Fig. VI. 3

Die hier gewählten Cluster-Cluster - Streupotentiale.

VII. Die Radialintegration in den Integralkernen (analytisch)

Nach Auswertung der Winkelintegrale in $\mathcal{J}$ und $\mathcal{J}^v$ bleiben folgende Radialintegrationen übrig:

in $\mathcal{J}$:

$$\int g_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{\ell_{34} k}(\alpha; q_i) g_{\ell_4 \ell_5 \ell_6}^{\ell'_{12} k'}(\beta; q_i) g_{\ell_7 \ell_8 \ell_9}^{\ell'_{34} k'}(\gamma; q_i) \varphi_{\ell_{12}}^{\ell_{12} k}(\eta) q_1^2 dq_1 \quad (\text{VII.1})$$

und in $\mathcal{J}^v$:

$$\int g_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{\ell_{34} k}(\alpha; q_i) g_{\ell_4 \ell_5 \ell_6}^{\ell'_{12} k'}(\beta; q_i) g_{\ell_7 \ell_8 \ell_9}^{\ell'_{34} k'}(\gamma; q_i) \varphi_{\ell_{10} \ell_{11} \ell_{12}}^{\ell_{12} k}(\delta; q_i) \varphi_{\ell_{12}}^{\ell_{12} k}(\eta) q_1^2 dq_1 \quad (\text{VII.2})$$

Gleichung (IV.8) gibt die funktionale Form von g und φ , es ist der Radialteil der Fouriertransformierten im k - Raum, multipliziert mit den drei Besselfunktionen aus der Faktorisierung und integriert über k :

$$g_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{\ell_{34} k}(\alpha; q_i) = \int_0^\infty f_{\ell_{34}}^k(k) j_{\ell_1}(k_1 q_1) j_{\ell_2}(k_2 q_2) j_{\ell_3}(k_3 q_3) k^2 dk \quad (\text{VII.3})$$

Wir wollen nun ein Verfahren zur analytischen Lösung zunächst der Integrale (VII.3) und dann (VII.1) und (VII.2) aufzeigen.

Zunächst benötigen wir die analytische Form der Fouriertransformierten $f_1(k)$. Dazu entwickeln wir die $\varphi_e(r)$ nach Kastenlösungen (Kasten mit Radius R):

$$\varphi_e(r) = \sum_v \{ \Theta(R-r) a_v j_\ell(k_v r) + \Theta(r-R) b_v h_\ell(i k_v r) \} \quad (\text{VII.4})$$

Das ist exakt, wenn wir nach dem vollständigen Satz entwickeln und auch die Kontinuumslösungen einschließen. Ebenso entwickeln wir die Potentiale $V_{1j}(r_{1j})$ nach Hankelfunktionen erster Art zum Drehimpuls null, also Funktionen, die denselben qualitativen Verlauf haben wie Yukawa - Kräfte: $e^{-\alpha r} / r$. Für praktische Rechnungen bricht man die Summe bei $\nu = N$ ab. Um für möglichst kleines N schon gute Approximation zu finden, muß man die Basis geschickt wählen. Bei den Potentialen paßt man einfach die numerisch bekannte Form an eine Summe von etwa drei Hankelfunktionen mit rein imaginärem Argument an. Bei den Wellenfunktionen geht man folgenden Weg:

Bekannt ist die Energie und der Drehimpuls des zu approximierenden Zustandes. Ebenso kennt man den Wechselwirkungsbereich und hat daher einen Anhaltspunkt für die Breite des Kastens, in dem die Basisfunktionen Eigenfunktionen sind. Die Tiefe des Basiskastens bestimmt man so: Wenn man N Basiszustände für einen Zustand mit Drehimpuls l nehmen möchte, wählt man die Kastentiefe so, daß der N -te Zustand zum Drehimpuls l der oberste gebundene Zustand zu diesem Drehimpuls ist und gerade die Bindungsenergie des zu approximierenden Zustandes hat. Auf diese Weise wird die Asymptotik der physikalischen Wellenfunktion im wesentlichen durch die Außenlösung dieses einen Zustandes bestimmt. Ein ähnliches Verfahren gibt Glen-denning ⁴⁶⁾ an, wobei für eine hinreichende Approximation (Fehler 10 %) ca. 10 Entwicklungsterme benö-

tigt werden, 15 Terme geben eine sehr gute Näherung der gesuchten Funktion.

Bei Drehimpuls Null ergeben sich jedoch Schwierigkeiten, da die physikalischen Wechselwirkungspotentiale für gebundene Zustände oft einen Soft - Core haben (z.B. ^{20}Ne). Einen Kasten mit Stufe am Ursprung kann man jedoch nicht nehmen, da dann die Innenlösungen keine sphärischen Besselfunktionen mehr sind. Dadurch, daß man einem höheren s - Zustand mehr Gewicht gibt, kann man diese Schwierigkeit umgehen.

Mit dem so gewonnenen Satz von Basisfunktionen kann man nun das physikalische Wechselwirkungspotential diagonalisieren und erhält die a_ν und b_ν aus (VII.4). Damit hat $f_1(k)$ die folgende Gestalt:

$$f_e(k) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\nu=0}^N \cdot \left(a_\nu \int_0^{R_0} j_e(kr) j_e(k_\nu r) r^2 dr + b_\nu \int_{R_0}^{\infty} j_e(kr) h_e(ik_\nu r) r^2 dr \right) \quad (\text{VII.5})$$

Das Ergebnis (Herleitung in Anhang A5) ist:

$$f_e(k) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\nu=0}^N \left\{ \frac{a_\nu R_0^2}{k^2 - k_\nu^2} \left(k j_{e+1}(kR_0) j_e(k_\nu R_0) - k_\nu j_e(kR_0) j_{e+1}(k_\nu R_0) \right) + \frac{b_\nu R_0^2}{k^2 + k_\nu^2} \left(k j_{e+1}(kR_0) h_e(ik_\nu R_0) - ik_\nu j_e(kR_0) h_{e+1}(ik_\nu R_0) \right) \right\} \quad (\text{VII.6})$$

Mit dem ebenfalls in Anhang A5 skizzierten Weg sind nun auch die Integrale (VII.1) , (VII.2) und (VII.3) analytisch lösbar.

Diese Methode ist uns, obschon ihre Klarheit besticht, zu aufwendig. Außerdem ist das Konvergenzverhalten der Summen über $l_1 \dots l_9$ in dieser Darstellung unüberschaubar. Für unsere praktischen Rechnungen schlagen wir ein numerisches Verfahren vor, auf das im folgenden Abschnitt eingegangen wird.

VIII. Numerische Auswertung der Fourierkoeffizienten

Wie schon erwähnt, sind die $\varphi_q^{\kappa}(\vec{I}_q, \vec{q}_i)$ in (IV.7) numerisch bekannt. Da es sich um gebundene Cluster - Cluster - Funktionen handelt, sind sie auf einen Bereich:

$$|\sum_{i=1}^3 \alpha_i \vec{q}_i| \lesssim R_1 + R_2 + 2.7 \text{ fm} \approx 8 \text{ fm}$$

beschränkt, wo R_1 und R_2 die Clusterradien sind. Für größere Abstände fällt die Cluster - Cluster - Wechselwirkung rapide ab und die Wellenfunktion ist praktisch null. Die Drehimpulse l sind ebenfalls beschränkt. Im Experiment werden ^{16}O - Kerne im Grundzustand 0^+ , im ersten angeregten 0^+ und im ersten 3^- Zustand beobachtet. Der 3^- ist eindeutig ein kollektiver Oktupolzustand, der nicht durch die $^{12}\text{C} - \alpha$ - Wechselwirkung beschrieben werden kann, sondern nur durch intrinsische Clusteranregung. Für ^{16}O - Funktionen tritt also nur $l = 0$ auf. Bei ^{20}Ne - Funktionen haben wir $l = 0, 2, 4$ zu berücksichtigen.

Wir wollen nun die $g_{l_1 l_2 l_3}^1(\alpha_1 q_1)$ aus (IV.7) einzeln numerisch bestimmen und punktweise dreidimensional vertafeln, ebenso die $v_{l_1 l_2 l_3}^0(ij)(\delta_1 q_1)$ aus (IV.12). Anschließend führen wir die Radialintegrale über q_1 in (IV.10) und (IV.13) numerisch aus, summieren über die Zwischendrehimpulse l_1 und erhalten die Integrale vom Typ $J(q_2, q_3)$ und $\gamma^V(q_2, q_3)$ für jeden physikalischen Kanal und jede Symmetrisierungsstufe einzeln. Damit können wir die Integralkerne $K_1^{\mu\nu}(q_2, q_3)$ jeden für sich berechnen und zu den endgültigen nichtlokalen Potentialen $K^{\mu\nu}$ aus (IV.10) und (IV.13) aufsummieren.

Wir schreiben (IV.7) in entkoppelter Form:

$$\varphi_{\ell}(r) Y_{\ell m}(\Omega_r) =$$

$$\sum_{\ell_1 \ell_2 \ell_3} g_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{\ell \kappa}(\alpha_1 q_1, \alpha_2 q_2, \alpha_3 q_3) \sum_{\lambda} 4\sqrt{2\pi} (-)^{\ell+\lambda} \hat{\ell}_1 \hat{\ell}_2 \hat{\ell}_3 \hat{\lambda} \times \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \ell_3 & \ell \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sum_{m_1 m_2 m_3} (\ell_1 m_1 \ell_2 m_2 | \lambda m_1 + m_2) \times (\lambda m_1 + m_2 \ell_3 m_3 | \ell m) Y_{\ell_1 m_1}(\hat{q}_1) Y_{\ell_2 m_2}(\hat{q}_2) Y_{\ell_3 m_3}(\hat{q}_3) \quad (\text{VIII.1})$$

mit $g_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{\ell \kappa}(\alpha_1 q_1, \alpha_2 q_2, \alpha_3 q_3)$ wie in (VII.3) $\times i^{\ell_1 + \ell_2 + \ell_3}$

$\tau = |\Sigma \alpha_i \vec{q}_i|$, $\Omega_r = \text{Winkelanteil von } \Sigma \alpha_i \vec{q}_i$

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \vec{q}_i$$

o.B.d.A. können wir $m = 0$ setzen, da g unabhängig von m ist; ebenso wählen wir die Koordinatenachsen günstigerweise:

$\vec{q}_1$: parallel zur z - Achse

$\vec{q}_2$: in der $x - z$ - Ebene

$\vec{q}_3$: frei im Raum

Es folgt nach einigem Umformen:

$$\sum_n A_n(\alpha_1 q_1, \alpha_2 q_2, \alpha_3 q_3) B_n(\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3) = C(\tau) \quad (\text{VIII.2})$$

wobei folgende Abkürzungen eingeführt wurden:

$n = (l_1, l_2, l_3)$, die verschiedenen Zwischendrehimpulskombinationen.

$$A_n = q_{l_1 l_2 l_3}^l$$

$$C(\vec{r}) = \varphi_l(r) P_l(\hat{r})$$

$$B_n(\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3) = \sum_{\lambda} (-1)^{l+\lambda} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\hat{l}_1^2 \hat{l}_2^2 \hat{l}_3^2 \hat{l}^2}{l^2} \begin{pmatrix} l_1 l_2 \lambda \\ 0 0 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda l_3 l \\ 0 0 0 \end{pmatrix} \\ \times \left\{ (-1)^{l_3} \hat{l} \begin{pmatrix} l_1 l_2 \lambda \\ 0 0 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda l_3 l \\ 0 0 0 \end{pmatrix} P_{l_2 0}(\cos \vartheta_{q_2}) P_{l_3 0}(\cos \vartheta_{q_3}) \right. \\ \left. + 2 \sum_{m_2=1}^{\min(l_2, l_3, \lambda)} (-1)^{l_2} \frac{1}{\hat{l}_1} (l_2 m_2 \lambda - m_2 | l_1 0) (\lambda m_2 l_3 - m_2 | l 0) \right. \\ \left. \times \sqrt{\frac{(l_2 - m_2)! (l_3 - m_2)!}{(l_2 + m_2)! (l_3 + m_2)!}} P_{l_2 m_2}(\cos \vartheta_{q_2}) P_{l_3 m_2}(\cos \vartheta_{q_3}) \cos(m_2 \varphi_{q_3}) \right\}$$

Da der Ausdruck (VIII.2) vollständig faktorisiert ist, bestehen folgende Symmetrien für die $g_{l_1 l_2 l_3}^1$:

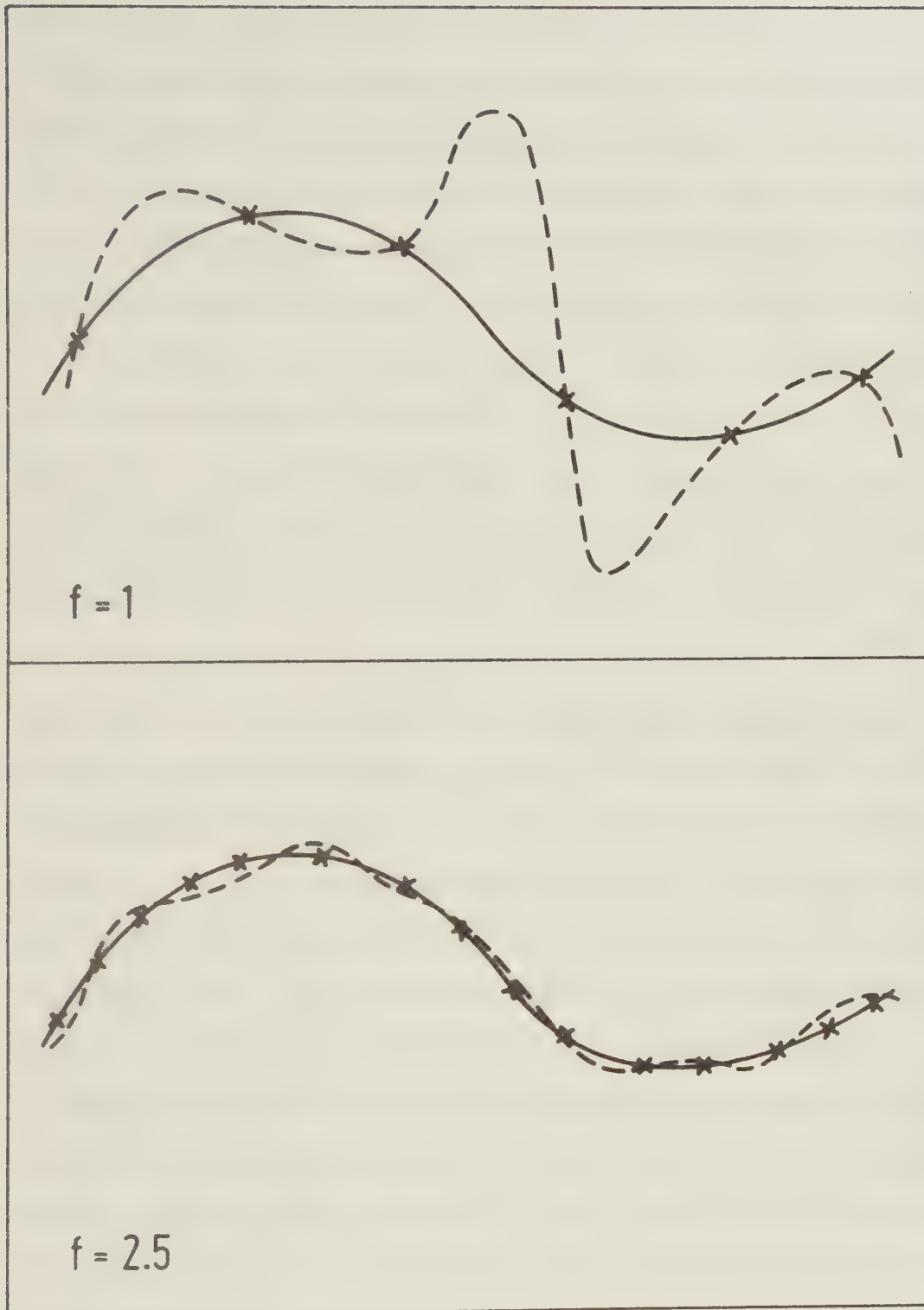
$$\begin{aligned} g_{l_1 l_2 l_3}^1(q_1, q_2, q_3) &= g_{l_1 l_3 l_2}^1(q_1, q_3, q_2) = \\ g_{l_3 l_1 l_2}^1(q_3, q_1, q_2) &= g_{l_3 l_2 l_1}^1(q_3, q_2, q_1) = \quad \text{(VIII.3)} \\ g_{l_2 l_3 l_1}^1(q_2, q_3, q_1) &= g_{l_2 l_1 l_3}^1(q_2, q_1, q_3) \end{aligned}$$

Wir geben nun einen festen Satz $\alpha_1 q_1$ vor und variieren dafür die Winkel q_1 , q_2 und q_3 f -mal so oft, wie Summanden über l_1 , l_2 und l_3 berücksichtigt werden. So gewinnen wir ein $f \cdot N$ N -Gleichungssystem zur Bestimmung von $g_{l_1 l_2 l_3}^1(\alpha_1 q_1)$ im Punkt $(\alpha_1 q_1, \alpha_2 q_2, \alpha_3 q_3)$ simultan für alle l_1 . N ist die Zahl der möglichen l_1 - l_2 - l_3 -Kombinationen und eine Funktion der maximal erlaubten

Werte der einzelnen Zwischendrehimpulse l_1 .

Die Auswahl der verschiedenen Winkel erfolgte nach folgender Vorschrift: Ein Zufallszahlengenerator erzeugt Zufallswinkel $(\vartheta_1, \vartheta_2, \varphi_1)$, daraus werden die Koordinaten r und $\hat{r}$ der rechten Seite von (VIII.2) ermittelt. Für die verschiedenen Gleichungen müssen die $|\vec{r}|$ - Werte möglichst äquidistant sein, um numerische Stabilität sicherzustellen. Erfüllen die gewählten Winkel bestimmte Mindestanforderungen für den Abstand verschiedener φ - Werte nicht, werden sie weggeworfen und neue Zufallswinkel erstellt. Diese Methode hat den Vorteil hoher Geschwindigkeit und die Wahrscheinlichkeit systematischer Fehler durch ungeeignete Auszeichnung der Geometrie besteht nicht. Außerdem läßt sich die Winkelunabhängigkeit der g - Koeffizienten als elementarer Test der Rechnungen auf diese Weise leicht durchführen.

Wir haben also ein System von $f \cdot N$ Gleichungen mit N Unbekannten und erhalten als Lösung simultan alle g - Koeffizienten zu festem Argument. Lösen wir ein $N \times N$ - Gleichungssystem, so sind die Ergebnisse noch nicht befriedigend. Die Erklärung ist einfach: Da man ja stets nur eine sehr beschränkte Anzahl von Drehimpulsen l_1 berücksichtigen kann, ist die g - Bestimmung eine Anpassung und diese wird umso besser, je größer die Überbestimmtheit des Gleichungssystems ist. In Fig. (VIII.1) ist dies an einem eindimensionalen Beispiel gezeigt. Die durchgezogene Linie sei die exakte Funktion, die gestrichelte Li-



Vergleich zwischen exakter Polynomanpassung (oben) und least - square - fit (unten) bei der Berechnung der Fourier - Koeffizienten der gebundenen Cluster - Cluster - Funktionen.

Fig. VIII.1

nie der Fit. Mit N Punkten ist eine Parabel N-1-ter Ordnung zwar eindeutig festgelegt, nichts sagt aber, daß diese Parabel irgendeine Gemeinsamkeit mit der gesuchten Funktion haben muß. Ein χ^2 -Test liefert natürlich null, was nur wiederholt, daß die Parabel eindeutig ist. Die praktischen Rechnungen haben nun gezeigt, daß eine Überbestimmtheit um den Faktor 2 bis 3 bereits recht gute Fits liefert, wie der χ^2 -Test zeigt. Voraussetzung ist, daß man hinreichend viele Zwischendrehimpulse l_1 berücksichtigt. Dies führt direkt auf die nächste Frage: Wieviele Drehimpulse sind in der Entwicklung zu berücksichtigen?

Mit dem klassischen Modell sich überlagernder Kugeln wurde der Winkelbereich gesucht, in dem der Überlapp ungleich null ist. Je größer der Abstand der Zentren zusammengehöriger Kugeln ist, desto kleiner und stärker um 0° konzentriert wird der Winkelbereich, das heißt, übertragen ins quantenmechanische Bild der Partialwellen, umso höhere Drehimpulse dominieren in der Entwicklung. Bei der Aufstellung des Gleichungssystems hat sich jedoch gezeigt, daß auch in Fällen, in denen hohe Drehimpulse charakteristisch sind, die kleinen Drehimpulse in das Gleichungssystem aufgenommen werden müssen, da die Entwicklung sonst einfach unbrauchbar ist; wir haben sehr große Werte für χ^2 und demzufolge ist auch die Forderung nach Winkelunabhängigkeit der g - Koeffizienten nicht erfüllt. Diese Tatsache erklärt sich so: Die langsam oszillieren-

den Anteile der Partialwellenzerlegung können (wegen der Orthogonalität der Basis) auch durch eine große Menge höherer Terme nicht simuliert werden, im Gegenteil werden die höheren Beiträge numerisch instabil und fluktuieren sehr stark, wenn man die kleinen Drehimpulse in der Entwicklung vernachlässigt. Aus den gleichen Gründen ist es nicht möglich, zum Beispiel nur gerade Drehimpulse in der Entwicklung mitzunehmen.

Andererseits ist die Zahl der Drehimpulse, die berücksichtigt werden, durch die Speicherkapazität und Rechengeschwindigkeit der heute zur Verfügung stehenden Computer eng begrenzt. Eine Verdopplung der Anzahl der Partialwellen l_1 ergibt eine etwa fünfmal so große Anzahl erlaubter Kombinationen (l_1, l_j, l_k) , das heißt, bei einer Überbestimmtheit $f = 3$ ist das zu lösende Gleichungssystem 15 mal so groß und so wird allein für die Diagonalisierung die 225-fache Zeit benötigt. Wir benötigen die $g_{l_1 l_j l_k}^1$ bis $l_{1,j,k}=8$ um die wesentlichen bekannten quasimolekularen Zustände im $^{16}\text{O} - ^{16}\text{O}$ - System beschreiben zu können. In den Drehimpulskopplungskoeffizienten der Winkelintegrale tauchen Dreiecksrelationen auf die auf Vektorsummen der Art $\vec{l}_1 + \vec{l}_j + \vec{l}_k = \vec{I}$ führen. Die quasimolekularen Zustände reichen (je nach Theorie) bis ca. $I = 16$. Mit Zwischendrehimpulsen $l_{1,j,k}=8$ könnte man I - Werte bis 24 erzeugen; wir vernachlässigen also nicht zu viele beitragende Partialwellen, wenn wir bis $I = 16$ rechnen wollen.

Wie schon erwähnt, haben wir die Fourier - Koeffizienten simultan für alle Drehimpulse an festen Punkten berechnet. Fig. (VIII.2) zeigt als Beispiel die Entwicklung der $^{16}\text{O} - \alpha$ - Wellenfunktion zum ^{20}Ne - Grundzustand im Punkt (2,4,6) bei Berücksichtigung von 127 Partialwellen. Die Durchgezogene Kurve ist die ursprüngliche Wellenfunktion in logarithmischer Darstellung, die gestrichelte Linie zeigt die Reproduktion aus den von uns berechneten Fourier - Koeffizienten. Um einen optisch erkennbaren Unterschied zwischen den Kurven zeigen zu können, haben wir einen der schlechteren Fälle genommen; bei den meisten Punkten sind die Abweichungen der aus den Entwicklungskoeffizienten gewonnenen Funktion von der Ausgangsfunktion kleiner als ein Prozent.

An vielen Punkten tragen einige wenige Partialwellen die Entwicklung, an anderen Punkten, speziell in der Umgebung der räumlichen Diagonale des Vertafelungsbereiches, tragen praktisch alle Partialwellen bis $l_{i,j,k} = 8$ wesentlich bei. Wir benötigen für die Integralkerne jedoch die Beiträge der einzelnen Partialwellen als Funktion des Ortes , so daß man praktisch die Anzahl der Partialwellen für den schlechtesten Fall bei allen Punkten berücksichtigen muß.

Für die weiteren Rechnungen müssen wir also die Symmetrierelationen (VIII.3) entfalten und die Koeffizienten nach (l_i, l_j, l_k) als Parametern umtabellieren. In dieser Darstellung sind sie auch anschaulicher als Entwick-

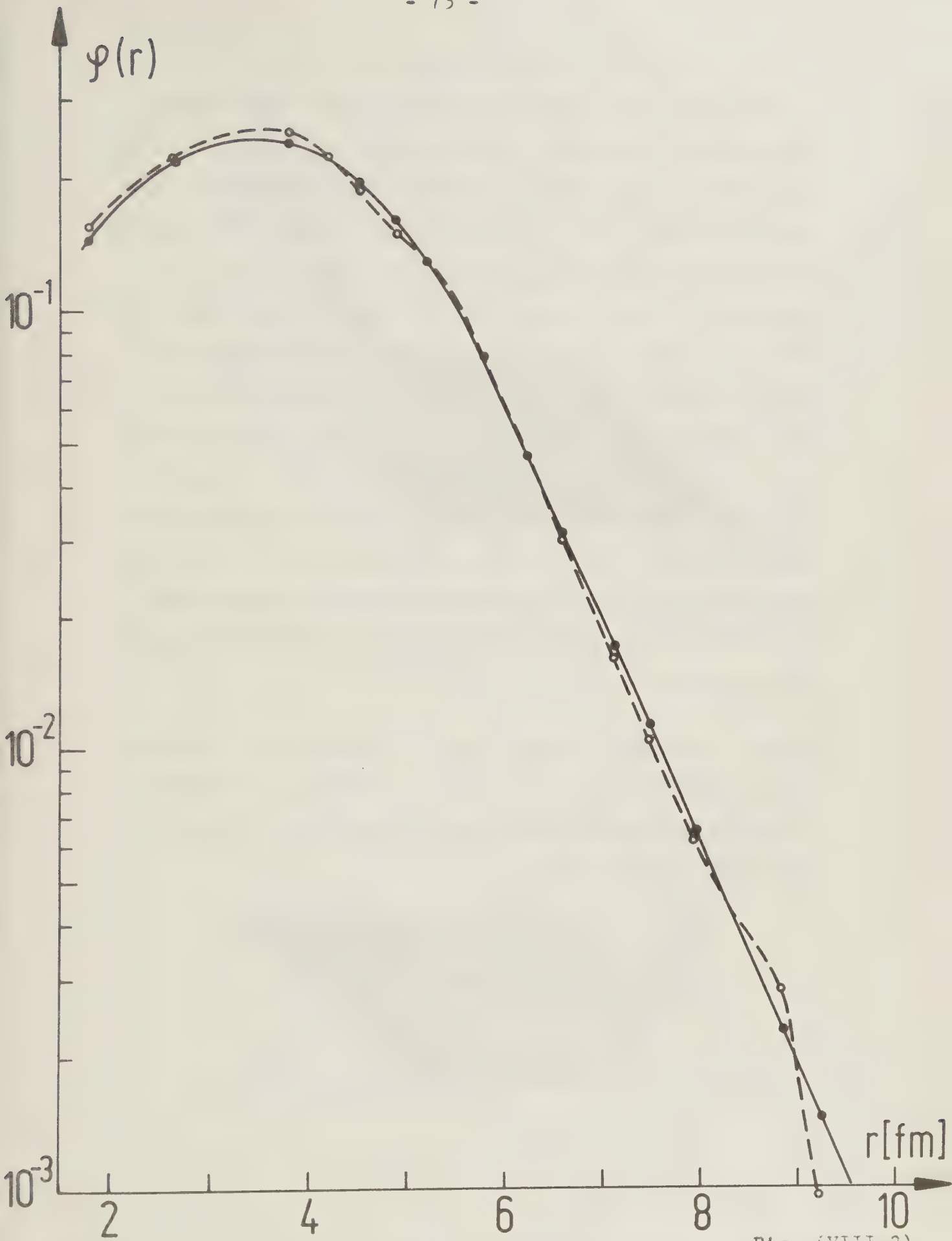


Fig. (VIII.2)

Vergleich der aus den Koeffizienten reproduzierten
Wellenfunktion mit der ursprünglichen.

lungskoeffizienten einer mehrdimensionalen Partialwellenzerlegung erkennbar. Einige markante Beiträge sind in Fig. (VIII.3) bis (VIII.6) dargestellt. Zunächst in 3) und 4) von der $^{12}\text{C} - \alpha$ - Relativfunktion zum ^{16}O - Grundzustand der Beitrag $g_{000}(r,r',0)$ und $g_{440}(r,r',0)$. In Fig (VIII.5) und 6) sehen wir die gleichen Beiträge der $^{16}\text{O} - \alpha$ - Funktion zum ^{20}Ne - Grundzustand. Wir sehen, daß die höheren Beiträge ihr Extremum bei deutlich von null verschiedenen Werten von r, r' - nahe der Diagonale $r = r'$ - haben. Die Relativfunktion zum ^{16}O - Grundzustand hat bei $r = 0$ ihr Maximum, dementsprechend hat der Monopolterm der Entwicklung sein Maximum bei $(0,0,0)$. Die Wellenfunktion zum ^{20}Ne - Grundzustand hat das Maximum bei ca. 3 - 4 fm, wir erwarten also das Extremum des Monopolterms bei (x,y,z) mit $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 3 \dots 4 \text{ fm}$.

Für die Integrale vom Typ (IV.13) benötigen wir auch die Fourierkoeffizienten der Cluster - Cluster - Potentiale im Kontinuum. Diese werden nach der gleichen Vorschrift entwickelt wie die $g_{l_1 l_j l_k}^1$.

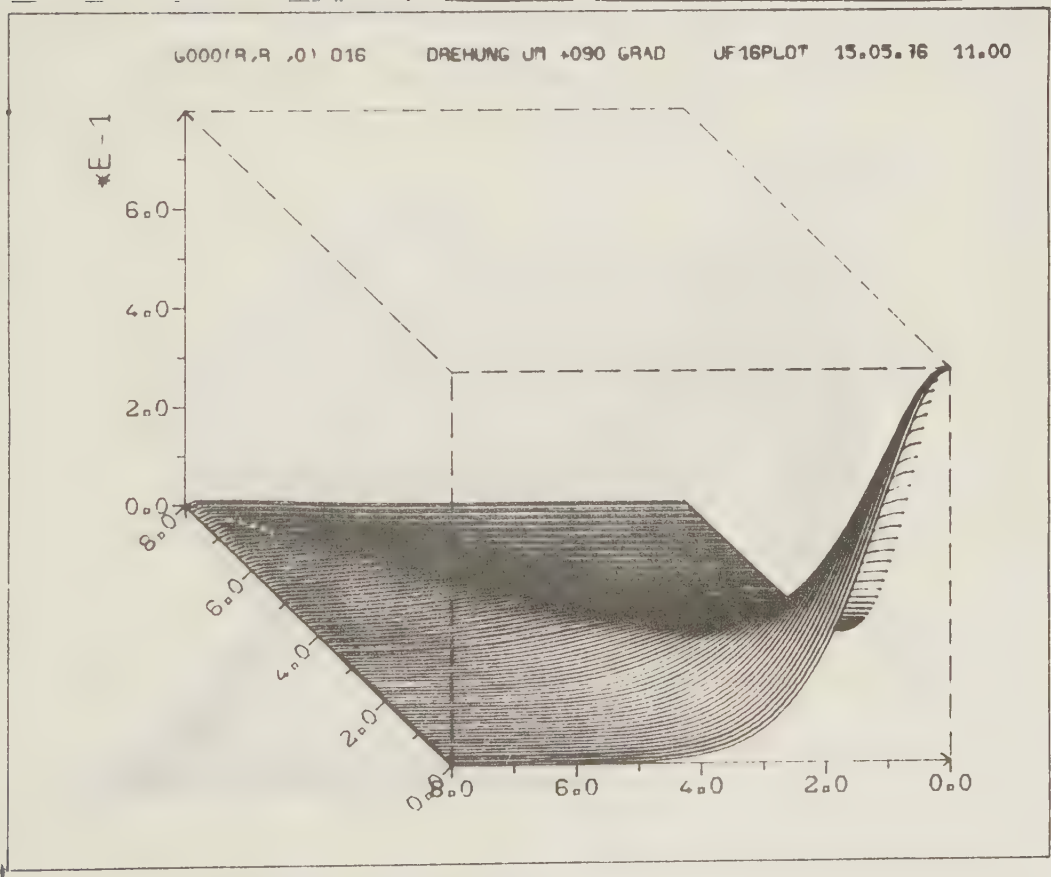
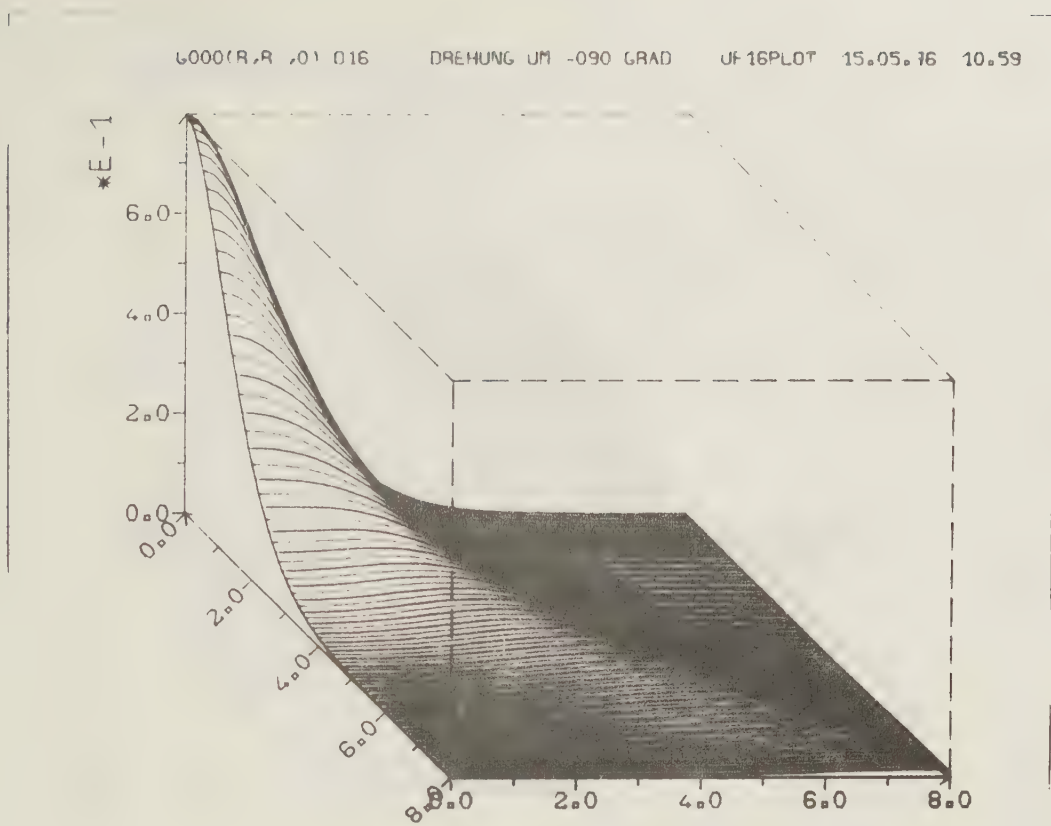


Fig.(VIII.3)

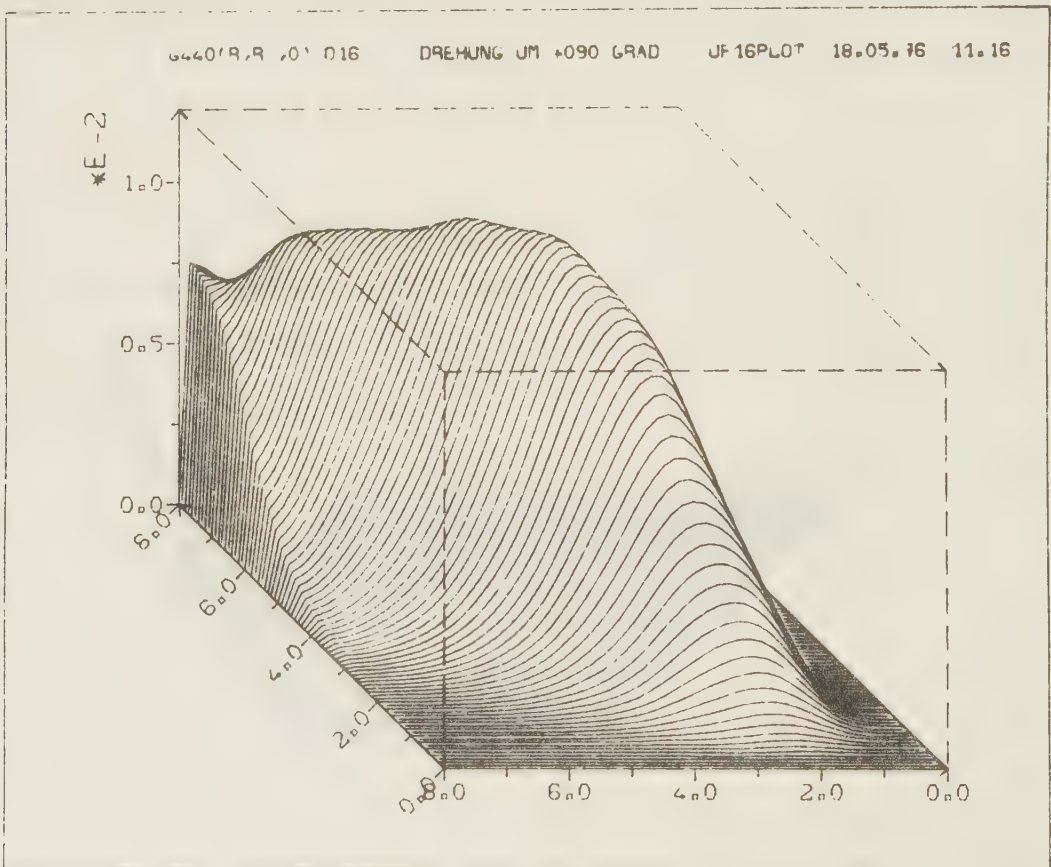
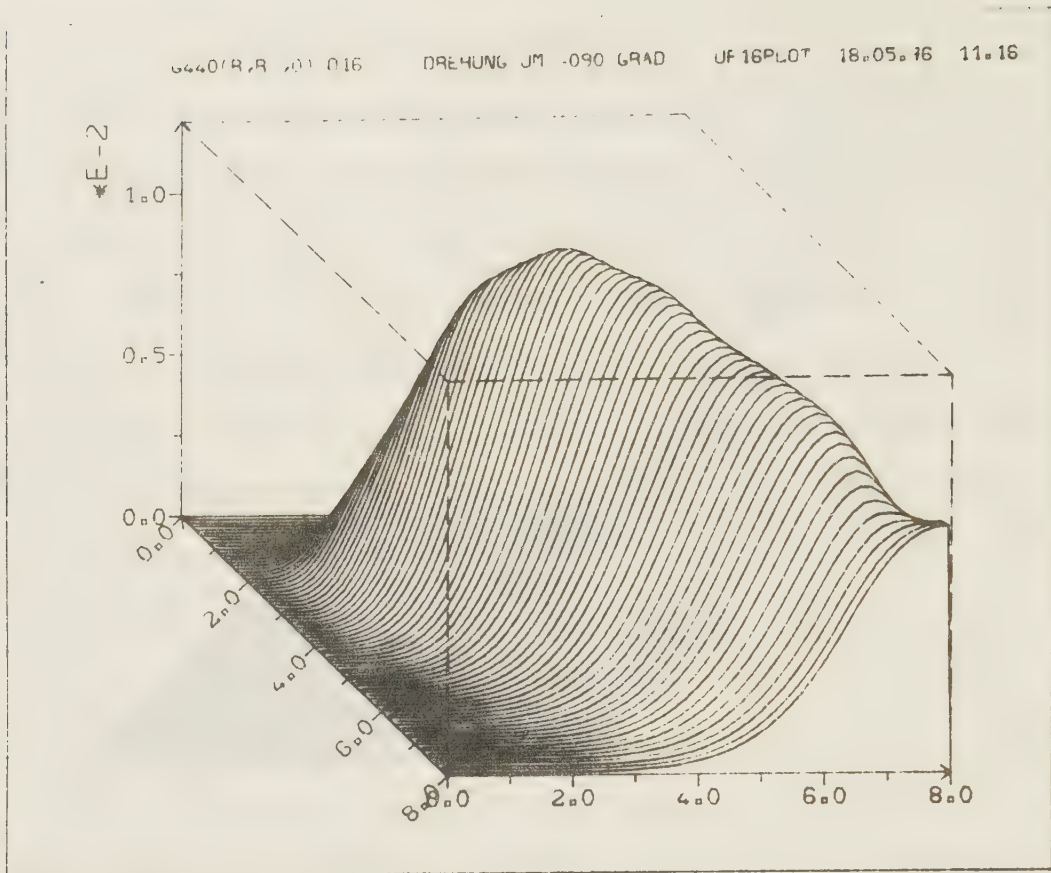


Fig.(VIII.4)

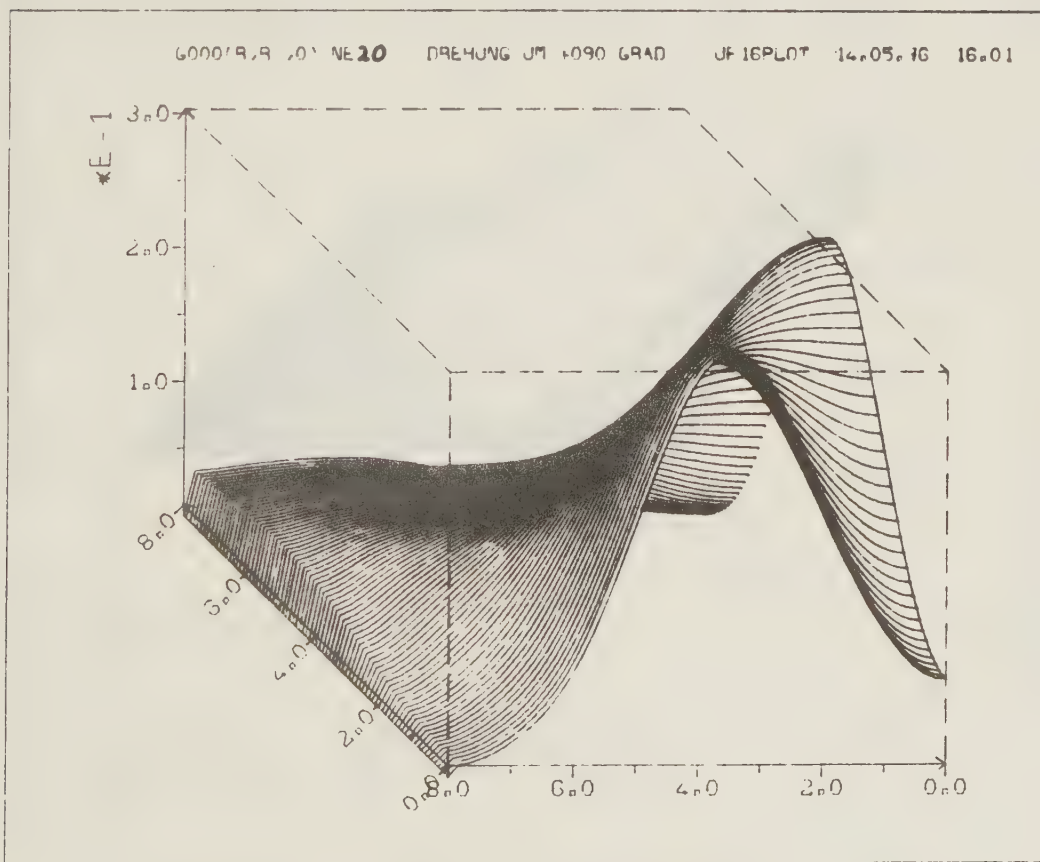
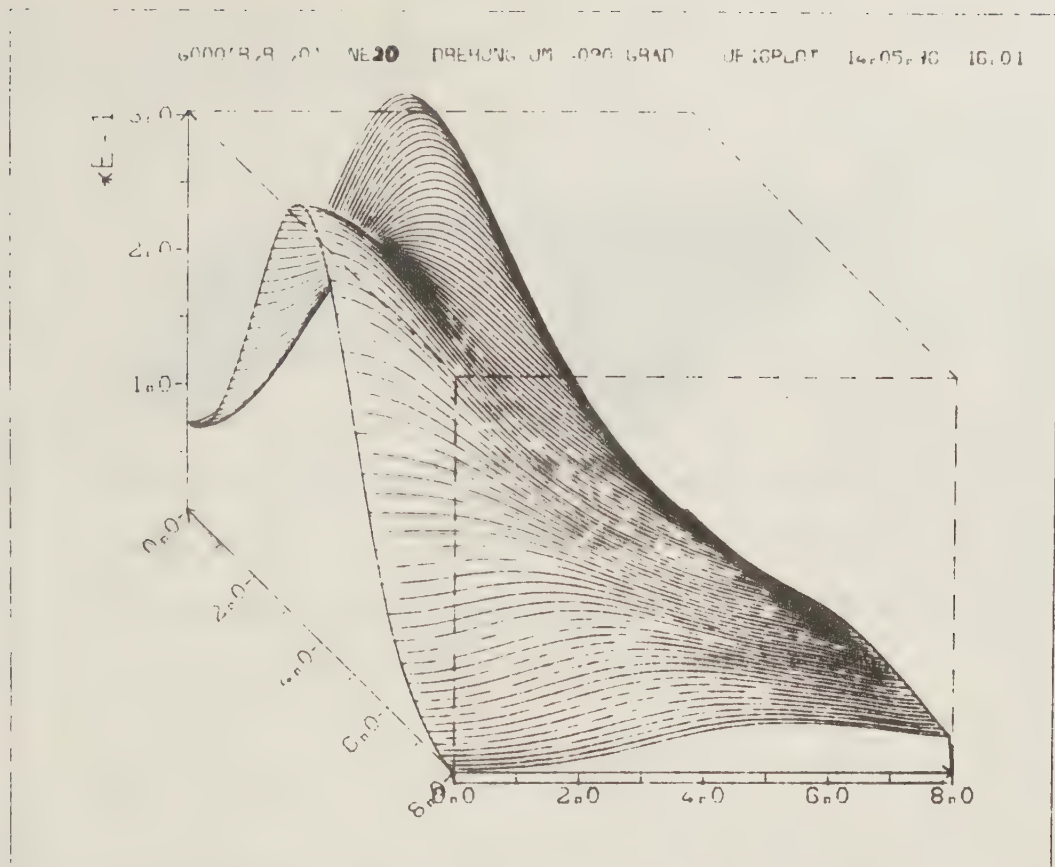


Fig. (VIII.5)

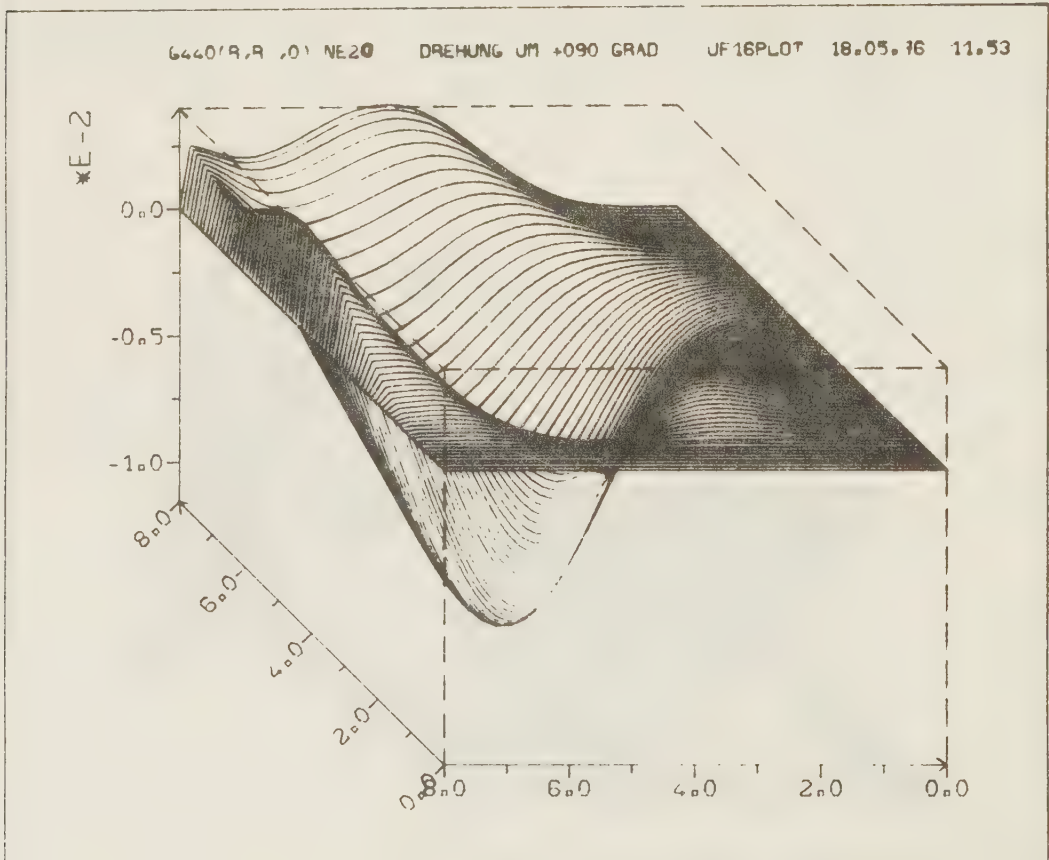
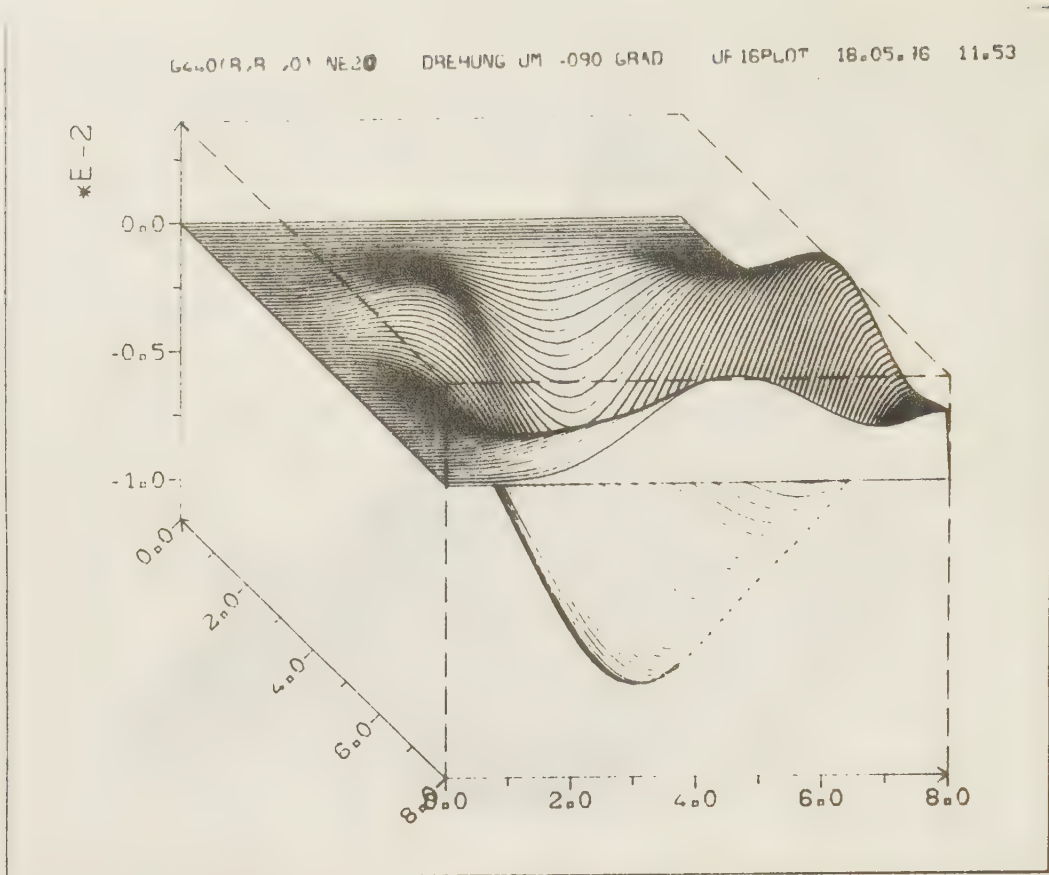


Fig. (VIII.6)

IX. Erste Ergebnisse

Sind die nichtlokalen Integralkerne (III.11), (III.12) und (III.15) einmal bekannt, so liegt die schwerste Arbeit hinter uns und wir können an die direkte Lösung der Integro - Differentialgleichungen (III.10) und (III.13) gehen. Deren Lösung, der Radialteil der Streuwelle, führt dann auf die gesuchten Wirkungsquerschnitte. In den vorigen Kapiteln haben wir uns das Rüstzeug für die Bestimmung der Integralkerne verschafft. Wir wollen uns nun dieser Aufgabe direkt zuwenden.

Als Modellfall wollen wir das Überlappintegral in $K_{16}^{kk}(r, r')$ aus (III.11b) und (A1.6), in der Literatur als Non - Orthogonality - Term bekannt, detailliert betrachten. Die Basis für den Fall vertauschter α - Cluster ist dieselbe wie bei vertauschten ^{12}C - Clustern, wie in A1 gezeigt. So können wir beide Terme zusammenfassen. Das Winkelintegral W_4 ist in (A3.9) gelöst, die $D_{1_1 1_j 1_k}^1$ werden durch (IV.9) definiert. Wir finden:

$$K_{1_{2+3}}^{kk}(r, r') = (1 + (-)^I) \frac{(32\pi)^{3/2}}{1} \left(\frac{8}{3}\right)^3 \sum_{l_1 \dots l_9} D_{l_1 l_2 l_3 l_4}^0 \cdot$$

$$D_{l_4 l_5 l_6 l_7}^0 D_{l_7 l_8 l_9 l_9}^0 W_4(I, l_1 \dots l_9) (-)^{l_1 + l_3 + l_5 + l_9}$$

$$\times \int \varphi_k^0(r'') g_{l_1 l_2 l_3}^{0k} \left(\frac{4}{3}r, \frac{8}{3}r', r''\right) g_{l_4 l_5 l_6}^{0k} (2r, 2r', r'') \times$$

$$g_{l_7 l_8 l_9}^{0k} \left(\frac{2}{3}r, \frac{2}{3}r', r''\right) r''^2 dr''$$

(IX.1)

mit

$$G(r) = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} - \frac{l_k(l_k+1)}{r^2} \right) - \epsilon_k$$

Wir ziehen den Operator $G(r)$ vor und schreiben:

$$K_{1(2+3)}^{\kappa\kappa}(r, r') \equiv G(r) K_0^I(r, r') \quad (\text{IX.2})$$

Die Funktion $K_0^I(r, r')$ wird im Detail so bestimmt: Als Vorbereitung tabellieren wir zunächst die Koeffizien-

ten

$$DW_4(I, l_1 \dots l_9) = (1 + (-)^I) \frac{(32\pi)^{3/2}}{I}$$

$$\cdot D_{l_1 l_2 l_3 l_4}^\circ D_{l_4 l_5 l_6 l_7}^\circ D_{l_7 l_8 l_9 l_9}^\circ W_4(I, l_1 \dots l_9)$$

mit:

$$W_4(I, l_1 \dots l_9) = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^3 \hat{l}_1 \dots \hat{l}_9 \sum_{l_1 l_2} (-)^{l_3+l_4+l_5+\frac{\sum l_i}{2}} \quad (\text{IX.3})$$

$$\cdot \hat{l}_1^2 \hat{l}_2^2 \begin{Bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ l_4 & l_5 & l_6 \\ l_7 & l_8 & l_9 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l_3 & l_2 & l_1 \\ I & l_9 & l_8 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_4 & l_7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_2 & l_5 & l_6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} l_2 & l_9 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_5 & l_6 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_9 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

für das gerade betrachtete I in folgender Weise: Wir limitieren zunächst die Maximalwerte von $l_1 \dots l_9$ so, daß gerade der Drehimpuls I des Gesamtsystems erreicht werden kann und speichern die mit dieser Beschränkung berechneten nicht verschwindenden Werte von DW_4 als ersten Block des später verwendeten Koeffizientenfeldes ab. Nun erhöhen wir die l_1 und speichern die neu hinzugekommenen Werte als nächsten Block ab usw. . Für den

Hauptlauf benötigen wir dieses Zahlenfeld, eines mit der Radialfunktion $\varphi^k(r)$ und eines mit allen Fourierkoeffizienten $g_{l_1 l_j l_k}^{0 k}(a, b, c)$, parametrisiert nach den Drehimpulsen. Wir nehmen jetzt den ersten Winkelkoeffizienten und suchen die g's mit entsprechenden Quantenzahlen.

Als Funktion von r und r' integrieren wir nun über die Koordinate r'' , wobei jedesmal die g's für die aktuellen Koordinaten interpoliert werden müssen. Wegen des hohen Rechenzeitbedarfs sind die g - Koeffizienten ja in dem groben Raster von 1 fm in jeder Richtung tabelliert. Da die Funktion jedoch glatt ist und nicht hin- und heroszilliert, wird durch dieses Verfahren keine Struktur verschüttet.

Es hat sich gezeigt, daß ein Integrationsverfahren mit relativ wenigen äquidistanten Stützstellen wie zum Beispiel 8 - Punkte - Simpson oder 8 - Punkte - Bode sehr unbefriedigend ist, wohingegen bereits eine 4 - Punkte - Gauß - Integration einigermaßen gute Ergebnisse liefert. Eine 8 - Punkte Gauß - Integration ist völlig hinreichend; mehr Integrationspunkte sind überflüssig, da die schwächste Stelle der Rechnung schon hier die dreidimensionale Interpolation ist. Das dafür entwickelte Unterprogramm berechnet aus den zehn nächstliegenden Gitterpunkten die Koeffizienten für ein vollständiges Polynom 2. Ordnung:

$$f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 y + a_4 y^2 + a_5 z + a_6 z^2 + a_7 xy + a_8 xz + a_9 yz$$

(IX.4)

Ein Verfahren mit Polynomen höherer Ordnung wurde wegen des zu großen Rechenzeitbedarfes verworfen. Wir benötigen nämlich für einen festen Satz $l_1 \dots l_9$ und festes r, r' 8 mal 3 Interpolationen. In r - und r' - Richtung wollen wir je 9 Werte nehmen, so daß pro Drehimpulssatz $3 \times 8 \times 9 \times 9 = 1944$ Interpolationen auszuführen sind.

Wir arbeiten nun blockweise die Winkelkoeffizienten ab und summieren die Integrale auf. Sobald der Zuwachs von einem Block zum nächsten vernachlässigbar wird, brechen wir ab. Zum Beispiel bewirken bei Gesamtdrehimpuls $I = 0$ die Beiträge mit einem Zwischendrehimpuls $l_1 = 2$ lediglich Fluktuationen im Promillebereich, die wesentlichen Beiträge werden durch l_1 - Kombinationen mit $l_{1 \max} = 0$ oder 1 bewirkt.

Es war wichtig, solche Auswahlkriterien zu finden, um die Integrale überhaupt faßbar zu machen. Für $I = 0$ und $l_{1 \max} = 8$ gibt es ca. 385 000 verschiedene nicht - verschwindende Beiträge von DW4. Die 81 Integrale für feste l_1 nehmen aber nach Optimierung noch ca. 2.5 sec in Anspruch, der volle Beitrag für $I = 0$ würde demnach über 240 Stunden Computerzeit auf der IBM 370/168 beanspruchen. Erfreulicherweise führt die Prozedur des Vorsortierens der Drehimpulse dazu, daß die Integralkerne nach spätestens 200 bis 400 Beiträgen stabil sind und nur noch statistisch fluktuieren. Die Genauigkeit der Rechnungen

wird im wesentlichen bestimmt durch die dreidimensionale Interpolation und die numerische Integration und ist bei $I = 0$ besser als 10^{-3} (rel. Genauigkeit), wie ein Test am Spezialfall $r = r' = 0$ gezeigt hat.

In Fig. (IX.1) und (IX.2) sind die Resultate $K_O^I(r, r')$ für $I = 0, 2, 4, 6, 8, 10$ aus zwei verschiedenen Blickwinkeln gezeichnet. Die Glättung der Kurve wurde durch einen zweidimensionalen kubischen Spline - Fit ⁴⁷⁾ erzielt. Mit Standard Techniken kann man jetzt den vollständigen Kern $K_1^{kk}(r, r')$ durch Anwendung von $\mathcal{O}(r)$ ausrechnen. Nach denselben Rechenvorschriften lassen sich auch sämtliche übrigen Integralkerne bestimmen.

Die Beobachtung, daß der Non - Orthogonality - Term für $I = 0$ stark um den Ursprung gepeakt ist und bei wachsendem I rasch um mehrere Größenordnungen kleiner wird, deckt sich mit Ergebnissen von Cotanch ⁴⁸⁾. Wir beachten dennoch die starke Nichtlokalität bei höheren Drehimpulsen. Die Begrenzung von r und r' in den Figuren liegt daran, daß wir die Fourier - Koeffizienten g_{11j1k}^{1k} nur bis $a = b = c = 8$ fm tabelliert haben; weiter draussen nehmen sie rasch ab.

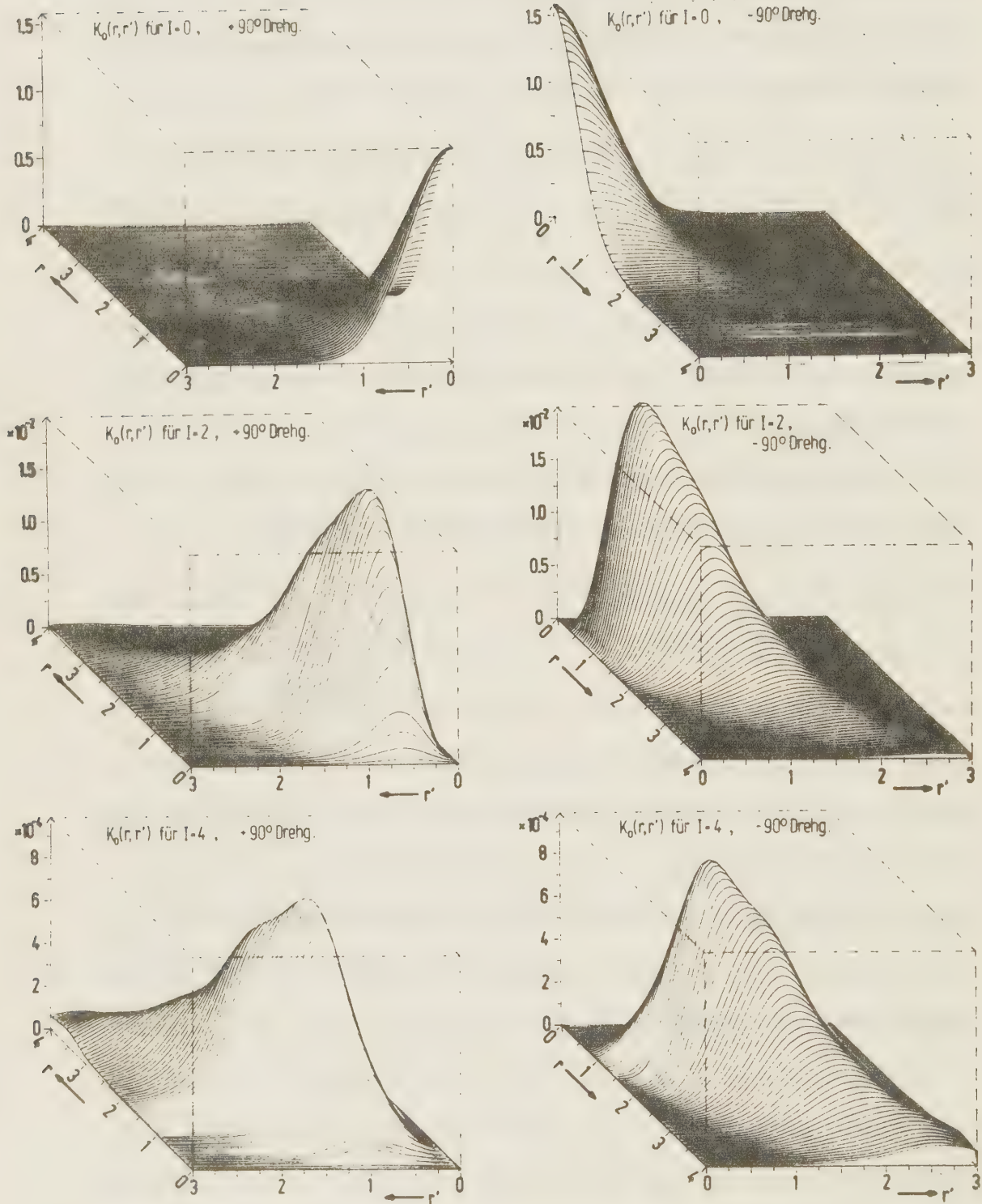


Fig. (IX.1)

Der Non - Orthogonality - Term für $^{16}\text{O} - ^{16}\text{O}$, $I = 0, 2, 4$

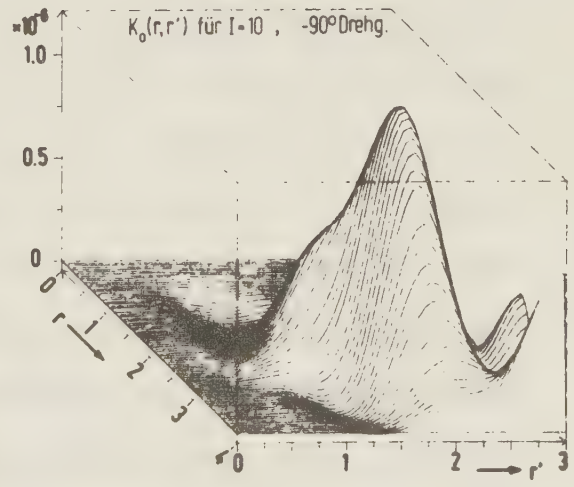
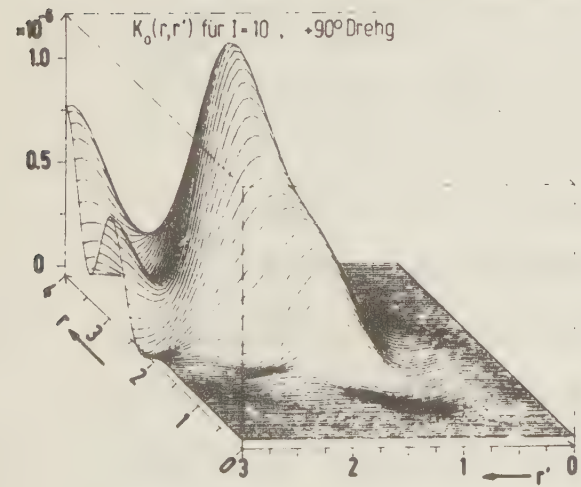
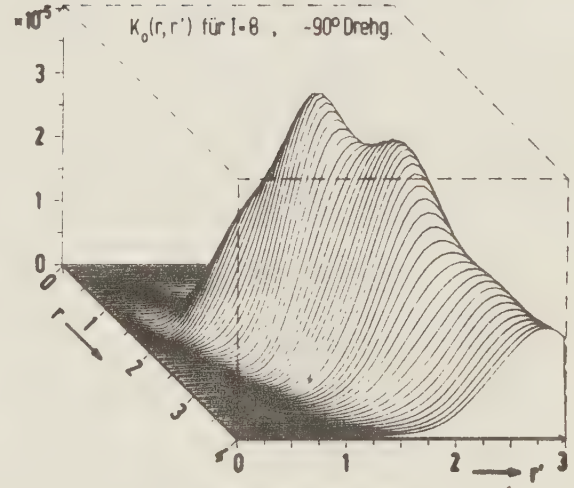
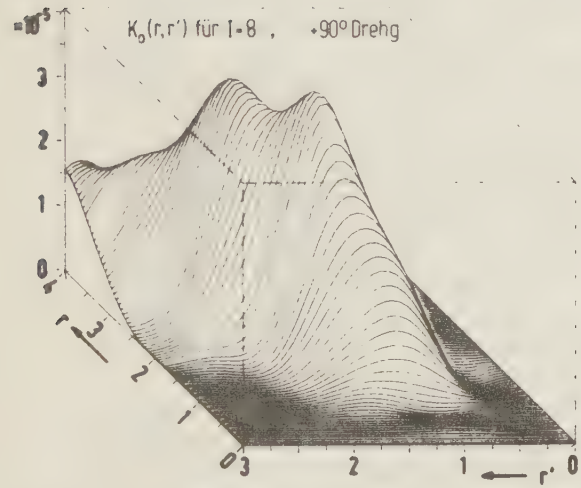
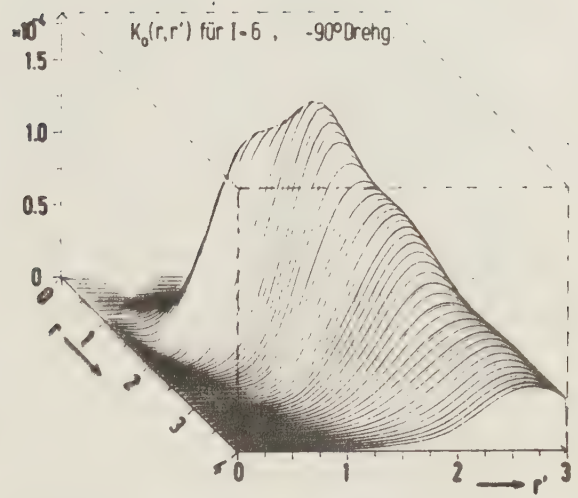
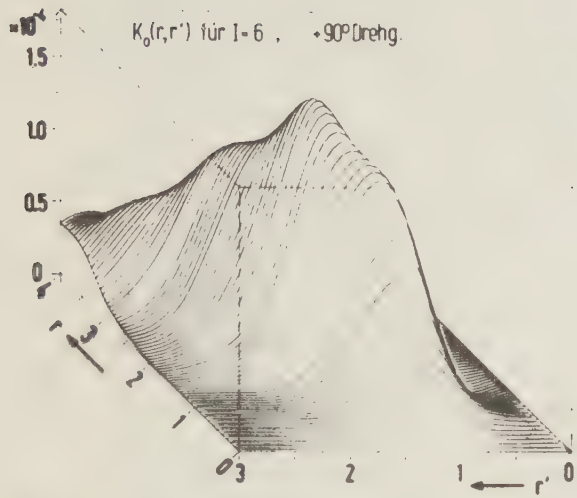


Fig. (IX.2)

Der Non - Orthogonalität - Term für $^{16}\text{O} - ^{16}\text{O}$, $I = 6, 8, 10$

X. Zusammenfassung

Messungen einer ganzen Reihe von Reaktionskanälen eines Systems, besonders ausführlich durchgeführt im Falle von $^{16}\text{O} - ^{16}\text{O}$ im Eingangskanal ¹¹⁻¹³⁾, inspirieren den Theoretiker, sich über die pauschalisierende Beschreibung von Schwerionensystemen mit klassischen und semi-klassischen Methoden, wie sie lange üblich war, hinwegzusetzen. Wir haben unser spezielles Augenmerk auf die starken α - Transferkanäle im $^{16}\text{O} - ^{16}\text{O}$ - System und deren Kopplung an den elastischen und die inelastischen Kanäle gerichtet. Die Einsicht, daß wir das Problem der Antisymmetrisierung wegen der zu hohen Komplexität des Systems nicht exakt lösen können einerseits und andererseits der Drang nach einer möglichst weitgehenden Beschreibung wenigstens der größten Beiträge der Antisymmetrisierung hat uns direkt zu einem Cluster - Modell mit vollständiger Symmetrisierung geführt. Außerdem kann man im Clustermodell den Rückstoß exakt behandeln und muß keine Entwicklungen anstellen. Wie wichtig auch dieser Aspekt ist, zeigt sich in der Literatur ¹⁸⁾, wo sich in der theoretischen Beschreibung der ganze Charakter der Reaktion ändert, wenn man den Rückstoß mitnimmt. Ein Blick auf die Geometrie des von uns betrachteten Systems in Fig. (III.1) zeigt, wie stark die Änderung der Relativkoordinate im $^{16}\text{O} - ^{16}\text{O}$ - Cluster - Modell ist.

Wir haben uns ein Vier - Körper - Problem gestellt und

wollen es im Formalismus der gekoppelten Kanäle lösen. Anstelle des von uns gewählten Cluster - Modells könnten wir auch ein Mehrzentrenmodell anwenden, zum Beispiel könnte man zwei Zweizentrenmodelle aneinander streuen. Wir haben das Cluster - Modell gewählt. Hier können wir auch die Stoß - Kinematik sauber und übersichtlich darstellen. Die Kernzustände sind im allgemeinen Fall eine Überlagerung von gebundenen Cluster - Cluster - Relativzuständen und kollektiven Cluster - Anregungen. Angeregte ^{12}C - Zustände können nur durch Kollektivzustände des ^{12}C - Clusters beschrieben werden, ^{16}O - Zustände werden wohl am besten als Kombination beider Anregungsarten dargestellt, wohingegen die Rotationsbanden im ^{20}Ne am einfachsten als Rotationszustände des Cluster - Cluster - Systems reproduziert werden können. Da unser Interesse zunächst darin lag, den Gesamtformalismus aufzustellen und die Lösungsmethoden zu zeigen, haben wir bislang auf Kollektivzustände der Cores verzichtet.

Da wir nicht nur spezifische Reaktionskanäle studieren wollen, sondern ebenso deren Kopplung aneinander - zum besseren Verständnis des Reaktionssystems insgesamt - kommen wir mit der üblichen DWBA - Analyse erster Ordnung nicht aus, die nur einen Kanal beschreibt und die Auswirkung aller anderen Kanäle auf diesen global durch ein effektives imaginäres Potential ausdrückt. Wir müssen eine Rechnung im Formalismus der gekoppel-

ten Kanäle durchführen, was über eine DWBA - Rechnung zweiter Ordnung hinausgeht. In unserem Falle beschreibt der Imaginärteil der Wechselwirkung die nicht mehr explizit berücksichtigten Kanäle und wird kleiner sein als in konventionellen Analysen einzelner Reaktionskanäle.

Die Behandlung des Vier - Körper - Problems nach der Resonating Group - Methode führt auf nichtlokale Integralkerne, die die Wechselwirkung beschreiben. Für die Radialteile der Streuwelle in den verschiedenen Kanälen ergeben sich gekoppelte Integro - Differentialgleichungen. Grundproblem bei der Auswertung der Integralkerne ist das Auftreten linear abhängiger Koordinaten. Man muß jedesmal eine geeignete Basis aufstellen und die übrigen Koordinaten als Linearkombination schreiben. Bei Berechnung der Integralkerne ist über drei Raumwinkel und eine Radialkoordinate zu integrieren. Wir haben also ein sechsfaches Winkelintegral und ein einfaches Radialintegral in jedem Punkt r und r' der beiden Koordinaten des Integralkerns durchzuführen. Wir entfalten die zusammengesetzten Koordinaten durch eine dreidimensionale Fourier - Transformation und führen die Winkelintegrale analytisch durch. Die dabei auftretende sehr komplexe Drehimpulsalgebra konnte durch Anwendung und Vertiefung der Umkopplungstechnik von Danos²⁶⁾, wie in Anhang A3 beschrieben, übersichtlich auf graphischem Wege bewältigt und optimiert werden. Nach

einer von uns entwickelten Methode haben wir den Radialteil der dreidimensionalen Fourier - Transformation numerisch bestimmt. Dieses Verfahren ist universell anwendbar für jede im betrachteten Bereich endliche stetig differenzierbare Funktion, die von einer Linearkombination dreier Vektoren abhängt. Die verbleibende Integration über eine Radialkoordinate wurde numerisch durchgeführt. Zu bemerken ist hier, daß ein großer Teil dieser Rechnungen für alle Streuenergien und -winkel nur einmal ausgeführt werden muß: die Bestimmung der Winkelkoeffizienten und der Fourier - Transformierten der gebundenen Cluster - Cluster - Relativfunktionen. Lediglich die Wechselwirkungspotentiale der Streuung sind im Allgemeinen energieabhängig und demzufolge müssen auch die Fourier - Koeffizienten stets neu ermittelt werden.

Abschließend haben wir den Non - Orthogonality - Term im elastischen Kanal untersucht. Wie erwartet ⁴⁸⁾, ist hier der Beitrag von der Symmetrisierung stark gepeakt um kleine Drehimpulse und kleine Abstände in der Kern - Kern - Relativkoordinate. Bemerkenswert ist die starke Nichtlokalität bei höheren Drehimpulsen, wenn auch hier die Gesamtstärke des Non - Orthogonality - Terms recht klein ist.

Wir haben somit in dieser Arbeit den Formalismus gekoppelter Kanäle - Rechnungen mit Transfer im Cluster - Mo-

dell unter Berücksichtigung des Rückstoßes und der Symmetrisierung entwickelt und die Details der praktischen Rechnung aufgezeigt und durchgeführt. In gleicher Weise wie der von uns berechnete Non - Orthogonality - Term werden die übrigen Integralkerne K_2 bis K_8 aus (III.11b), (III.12b) und (III.15) ausgewertet. Zur Lösung der Integro - Differential - Gleichungen schlagen wir ein von Raynal ⁴⁹⁾ entwickeltes Verfahren zur simultanen Iteration gekoppelter Gleichungen vor.

Für die Transfer - Kanäle selbst wird man Antwort auf folgende Fragen erhalten: Wie brauchbar sind effektive lokale Beschreibungen dieser Vorgänge, wie sie heute üblich sind? Wie wichtig ist eine saubere Behandlung der Nichtlokalität der Wechselwirkung? Zudem wird die Kopplung der Transferkanäle an den elastischen Kanal im Sinne eines entsprechend modifizierten Doppelresonanzmechanismus weitere Information über die Herkunft der intermediären Strukturen im elastischen Streuquerschnitt einer Reihe von Kern - Kern - Systemen geben.

Unser Verfahren wird besonders interessant bei großem relativen Massentransfer; nicht zuletzt denken wir an die Anwendung bei "Super - Cluster - Transfer" in sehr schweren Streusystemen, wie sie noch in diesem Jahr bei der GSI verfügbar sein werden.

Anhang A1

Wir wollen hier die Integralkerne $K^{\kappa\kappa'}$ und $K^{\kappa\lambda'}$ für $^{16}\text{O} - ^{16}\text{O}$ - Kanäle ausführlich hinschreiben. In völliger Analogie lassen sich dann auch die $K^{\lambda\kappa'}$ und $K^{\lambda\lambda'}$ für $^{20}\text{Ne} - ^{12}\text{C}$ - Kanäle herleiten.

Der besseren Übersichtlichkeit halber und im Vorgriff auf die in Kapitel IV gemachte Annahme, daß alle Cluster im Grundzustand sind, schreiben wir die Kanalfunktionen symbolisch:

$$\psi_{12-34}^{I\kappa} = \left[\varphi_{(\vec{r}_{12})}^{l_{12}} \otimes \varphi_{(\vec{r}_{34})}^{l_{34}} \otimes Y_{(\hat{r}_{12-34})}^{l_{12-34}} \right]^{I\kappa}$$

Zunächst ist die für die gerade vorliegende Konfiguration in der momentanen Symmetrisierungsstufe geeignete Basis zu suchen. Zwei dieser Basiskoordinaten legt der Formalismus fest, nämlich die beiden Streurelativkoordinaten. Die Wahl der dritten Koordinate ist beliebig; wir haben $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ genommen, wo diese linear unabhängig von den anderen beiden Basisvektoren ist, ansonsten $\vec{r}_{34} = \vec{r}_3 - \vec{r}_4$.

Für jede Basis müssen wir die Jakobi - Determinante der Transformation von der Grundkonfiguration auf die gerade vorliegende bestimmen, da diese Transformation Stauchung bzw. Streckung des Volumenelementes beinhaltet. Die Funktionaldeterminante der Transformation von den ursprünglichen Koordinaten $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4$ auf die Basis der Ausgangskonfiguration $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3, \vec{R}_S$, wo $\vec{R}_S$ den Gesamtschwerpunkt angibt und $\vec{q}_1 = \vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, $\vec{q}_2 = \vec{r}_{34} = \vec{r}_3 - \vec{r}_4$ sowie $\vec{q}_3 = \vec{r}_{12-34} = .75 \vec{r}_1 + .25 \vec{r}_2 - .75 \vec{r}_3 - .25 \vec{r}_4$,

ist in der Normierung der Wellenfunktionen implizit enthalten. Wir suchen die Funktionaldeterminante für den Übergang $(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3, \vec{R}_s) \rightarrow (\vec{q}_1', \vec{q}_2', \vec{q}_3', \vec{R}_s)$. Da der Schwerpunkt völlig abgespalten werden kann, ist es unsere Aufgabe, die Transformation von $(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3)$ nach $(\vec{q}_1', \vec{q}_2', \vec{q}_3')$ zu bestimmen. Wegen der Erhaltung des Gesamtschwerpunktes ist R_s konstant bei allen Fragmentationen und allen Symmetrisierungsstufen. Die Volumenelemente sind $d\tau_q = d^3\vec{q}_1 d^3\vec{q}_2 d^3\vec{q}_3$ und $d\tau_{q'} = d^3\vec{q}_1' d^3\vec{q}_2' d^3\vec{q}_3'$. Die Transformationsgleichung lautet:

$$d\tau_q = D_{\vec{q}\vec{q}'} d\tau_{q'} \quad (A1.1)$$

mit der Jakobi - Determinante:

$$D_{\vec{q}\vec{q}'} = \frac{\partial(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3)}{\partial(\vec{q}_1', \vec{q}_2', \vec{q}_3')} = \left(\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(x_1', x_2', x_3')} \right)^3 \quad (A1.2)$$

, da wegen der Isotropie des Raumes x-, y- und z-Koordinate gleichberechtigt und äquivalent sind. Im weiteren bezeichnen wir $D_{\vec{q}\vec{q}'}$ schlicht mit D.

Zunächst zerlegen wir wie in (III.11):

$$K^{\kappa\kappa'} = \sum_{G=2}^4 (K_{1G}^{\kappa\kappa'} + K_{2G}^{\kappa\kappa'})$$

mit:

$$K_{1G}^{\kappa\kappa'}(r, r^G) =$$

$$O(r) D \int \Psi_{\kappa}^{I l_{\kappa}^*}(\vec{q}_i) \Psi_{\kappa'}^{I l_{\kappa'}}(\vec{q}_i^G) d^3 \vec{q}_i d^2 \Omega_r d^2 \Omega_{r^G} \quad (A1.3a)$$

wobei

$$O(r) = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} - \frac{l_{\kappa}(l_{\kappa}+1)}{r^2} \right) - \epsilon_{\kappa}$$

und:

$$K_{2G}^{\kappa\kappa'}(r, r^G) =$$

$$D \int \Psi_{\kappa}^{I l_{\kappa}^*}(\vec{q}_i) V_{16_0-16_0}^{\circ}(\vec{f}_i) \Psi_{\kappa'}^{I l_{\kappa'}}(\vec{q}_i^G) d^3 \vec{q}_i d^2 \Omega_r d^2 \Omega_{r^G} \quad (A1.3b)$$

Die Koordinaten sind:

$$\vec{q}_i = \{ \vec{r}_{12}, \vec{r}_{34}, \vec{r}_{12-34} \equiv \vec{r} \} \quad \vec{q}_i^G = \{ \vec{r}_{12}^G, \vec{r}_{34}^G, \vec{r}_{12-34}^G \equiv \vec{r}^G \}$$

$$\vec{f}_i = \{ \vec{r}_{13}, \vec{r}_{14}, \vec{r}_{23}, \vec{r}_{24} \}$$

Das Potential setzt sich zusammen aus:

$$\begin{aligned} V_{16_0-16_0}^{\circ}(\vec{f}_i) &= V_{C-\alpha}(\vec{r}_{14}) \\ &+ V_{\alpha-\alpha}(\vec{r}_{24}) + V_{C-C}(\vec{r}_{13}) + V_{C-\alpha}(\vec{r}_{23}) \end{aligned} \quad (A1.4)$$

Es sind drei Symmetrisierungsstufen zu betrachten, wir haben also drei Beiträge von (A1.3a) zu lösen sowie drei Integrale (A1.3b) mit je vier Summanden.

Vorab numerieren wir die Symmetrisierungsstufen bezüglich der Clusterstellung:

$G, \rho = 1$: Ausgangskonfiguration (1, 2, 3, 4)

$G, \rho = 2$: Austausch der ^{12}C - und der α -Cluster simultan (3, 4, 1, 2)

$G, \rho = 3$: Austausch der α -Cluster (1, 4, 3, 2)

$G, \rho = 4$: Austausch der ^{12}C - Cluster (3, 2, 1, 4)

Es gibt im Fall (A1.3a,b) zwei verschiedene Basissysteme: Für $G = 2$ ist $\vec{r}^G = -\vec{r}$, $\vec{r}_{12}^G = -\vec{r}_{12}$ und $\vec{r}_{34}^G = -\vec{r}_{34}$; diese Basis ist also die am Ursprung gespiegelte Ausgangsbasis, die Jakobi-Determinante dieser Transformation ist eins.

Bei $G = 3$ haben wir

$$\vec{q}_1' = \vec{q}_1 = \vec{r}_{12} \quad \vec{q}_2' = \vec{q}_3 = \vec{r}_{12-34} = \vec{r}$$

$$\vec{q}_3' = \vec{r}_{14-32} = \vec{r}'$$

Es ist also
$$\vec{q}_2 = \vec{q}_1' + 4/3 \vec{q}_2' - 8/3 \vec{q}_3'$$

Die Funktional - Determinante ist demnach

$$D = \left(\det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4/3 & -8/3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right)^3 = \left(\frac{8}{3} \right)^3 \quad (A1.5)$$

Zu $G = 4$ gehört die zum Ursprung punktsymmetrische Basis von 3 : $(-\vec{q}_1', -\vec{q}_2', -\vec{q}_3')$. Bei $G = 2$ und 4 haben wir wegen der Beziehung

$$Y_{\ell m}(-\hat{r}) = (-)^{\ell} Y_{\ell m}(\hat{r})$$

Vorfaktoren:

$$(-)^{\ell_{q_1'} + \ell_{q_2'} + \ell_{q_3'}}$$

Wir schreiben zunächst die Überlappintegrale $K_{1G}^{\kappa\kappa'}$ hin.

$$K_{12}^{\kappa\kappa'}(r, r') = (-)^I G(r) \delta(r-r') \delta_{\kappa\kappa'}$$

$$K_{13}^{\kappa\kappa'}(r, r') \equiv (-)^{\ell_{12}} K_{14}^{\kappa\kappa'}(r, r') =$$

$$\left(\frac{8}{3}\right)^3 G(r) \int \left[\left[Y_{\ell_{12}}^{\ell_{12}}(\vec{q}_1') \otimes Y_{\ell_{34}}^{\ell_{34}}(\vec{q}_1' + \frac{4}{3}\vec{r} - \frac{8}{3}\vec{r}') \otimes Y_{\ell_{12-34}}^{\ell_{12-34}}(\hat{r}) \right]^{I\kappa} \right. \quad (A1.6)$$

$$\left. \left[Y_{\ell_{12}}^{\ell_{12}}(\vec{q}_1' + 2\vec{r} - 2\vec{r}') \otimes Y_{\ell_{34}}^{\ell_{34}}(-\vec{q}_1' + \frac{2}{3}\vec{r} + \frac{2}{3}\vec{r}') \otimes Y_{\ell_{12-34}}^{\ell_{12-34}}(\hat{r}) \right]^{I\kappa'} \right]^0$$

$$\cdot d^3\vec{q}_1' d^2\Omega_r d^2\Omega_{r'}$$

In Analogie dazu lauten die $K_{2G}^{\kappa\kappa'}$:

$$K_{22}^{\kappa\kappa'}(r, r') =$$

(A1.7)

$$(-)^I \delta(r-r') V_{16_0 - 16_0}(r') \delta_{\kappa\kappa'}$$

$$K_{23}^{\kappa\kappa'}(r, r') \equiv (-)^{\ell'_{12}} K_{24}^{\kappa\kappa'}(r, r') =$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{8}{3}\right)^3 \int \left[\left[\varphi^{\ell'_{12}}(\vec{q}_1') \otimes \varphi^{\ell'_{34}}(\vec{q}_1' + \frac{4}{3}\vec{r} - \frac{8}{3}\vec{r}') \otimes Y_{(\vec{r})}^{\ell'_{12-34}} \right]^{I_1, \kappa} \otimes \right. \\ & \left[\left(V_{c-\alpha}^{\circ}(\frac{2}{3}\vec{r} + \frac{2}{3}\vec{r}') + V_{\alpha-\alpha}^{\circ}(\vec{q}_1' - \frac{2}{3}\vec{r} - \frac{2}{3}\vec{r}') + V_{c-c}^{\circ}(-\vec{q}_1' - 2\vec{r} + 2\vec{r}') \right. \right. \\ & \left. \left. + V_{c-\alpha}^{\circ}(-2\vec{r} + 2\vec{r}') \right) \right]^{\circ} \otimes \\ & \left. \left[\varphi^{\ell'_{12}}(\vec{q}_1' + 2\vec{r} - 2\vec{r}') \otimes \varphi^{\ell'_{34}}(-\vec{q}_1' + \frac{2}{3}\vec{r} + \frac{2}{3}\vec{r}') \otimes Y_{(\vec{r}') }^{\ell'_{12-34}} \right]^{I_1, \kappa'} \right]^{\circ} \quad (A1.7) \end{aligned}$$

$$d^3\vec{q}_1' \, d^2\Omega_r \, d^2\Omega_{r'}$$

Die Wechselwirkung von $^{16}\text{O} - ^{16}\text{O}$ mit der $^{20}\text{Ne} - ^{12}\text{C}$ - Fragmentation steckt in $K^{\kappa\lambda'}$, das wir nach (III.12) zerlegen:

$$K^{\kappa\lambda'}(r, r') = \sum_{\rho=1}^4 (K_{3\rho}^{\kappa\lambda'} + K_{4\rho}^{\kappa\lambda'})$$

mit

$$K_{3\rho}^{\kappa\lambda'}(r, r') =$$

(A1.8a)

$$O(r) D \int \psi_{\kappa}^{I\ell_{\kappa}}(\vec{q}_1) \psi_{\lambda'}^{I\ell_{\lambda'}}(\vec{q}_1') d^3\vec{q}_1 \, d^2\Omega_r \, d^2\Omega_{r'}$$

mit $\vec{q}_1$ wie in (A1.3) und

$$\vec{t}_i^{\rho} = \left\{ \vec{r}_{12}^{\rho}, \vec{r}_{12-3}^{\rho}, \vec{r}_{123-4}^{\rho} \equiv \vec{r}' \right\}$$

und

$$K_{4\rho}^{\kappa\lambda'}(r, r') =$$

$$D \int \psi_{\kappa}^{I_{\rho\kappa}}(\vec{q}_i) V_{16_0-16_0}^0(\rho_i) \psi_{\lambda'}^{I_{\rho\lambda'}}(\vec{t}_i^{\rho}) \quad (A1.8b)$$

$$d^3\vec{q}_i \, d^2\Omega_r \, d^2\Omega_{r'}$$

Es sind hier alle vier Symmetrisierungsstufen zu berücksichtigen, da auch der Überlapp mit der Ausgangskonfiguration von $^{20}\text{Ne} - ^{12}\text{C}$ für $^{16}\text{O} - ^{16}\text{O}$ einen Beitrag zur nichtlokalen Wechselwirkung liefert.

Für $\rho = 1, 3$ finden wir die Basis:

$$\vec{q}_1' = \vec{q}_1 = \vec{r}_{12} \quad , \quad \vec{q}_2' = \vec{q}_3 = \vec{r}_{12-34} = \vec{r}$$

$$\vec{q}_3' = \vec{r}_{124-3} = \vec{r}' \quad ; \text{ es ist } \vec{q}_2 = 2\vec{r} - 5/2\vec{r}'$$

und

$$D_{\rho=1,3} = \left(\det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right)^3 = \left(\frac{5}{2} \right)^3 \quad (A1.9)$$

Die Basis für $\rho = 2, 4$ lautet:

$$\vec{q}_1' = \vec{q}_2 = \vec{r}_{34} \quad , \quad \vec{q}_2' = \vec{q}_3 = \vec{r}_{12-34} = \vec{r}$$

$$\vec{q}_3' = \vec{r}_{324-1} = \vec{r}'$$

$$\text{es folgt } \vec{q}_1 = -2 \vec{r} - 5/2 \vec{r}'$$

und

$$D_{\rho=2,4} = \left(\det \begin{vmatrix} 0 & -2 & -5/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right)^3 = \left(-\frac{5}{2} \right)^3 \quad (\text{A1.10})$$

Für die Überlappintegrale $K_{3\rho}^{\kappa\lambda'}$ erhalten wir endlich:

$$K_{31}^{\kappa\lambda'}(r, r') =$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{5}{2} \right)^3 G(r) \int \left[\varphi^{\ell_{12}}(\vec{q}_1') \otimes \varphi^{\ell_{34}}(2\vec{r} - \frac{5}{2}\vec{r}') \otimes Y^{\ell_{12-34}}(\vec{r}) \right]^{I, \kappa} \otimes \\ & \left[\varphi^{\tilde{\ell}_{12}}(\vec{q}_1') \otimes \varphi^{\ell_{12-4}}(\frac{5}{2}\vec{r} - \frac{15}{8}\vec{r}') \otimes Y^{\ell_{124-3}}(\vec{r}') \right]^{I, \lambda'} \\ & d^3\vec{q}_1' d^2\Omega_r d^2\Omega_{r'} \end{aligned} \quad (\text{A1.11})$$

$$K_{32}^{\kappa\lambda'}(r, r') =$$

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{5}{2} \right)^3 G(r) \int \left[\varphi^{\ell_{12}}(-2\vec{r} - \frac{5}{2}\vec{r}') \otimes \varphi^{\ell_{34}}(\vec{q}_1') \otimes Y^{\ell_{12-34}}(\vec{r}) \right]^{I, \kappa} \otimes \\ & \left[\varphi^{\tilde{\ell}_{12}}(\vec{q}_1') \otimes \varphi^{\ell_{12-4}}(-\frac{5}{2}\vec{r} - \frac{15}{8}\vec{r}') \otimes Y^{\ell_{124-3}}(\vec{r}') \right]^{I, \lambda'} \\ & d^3\vec{q}_1' d^2\Omega_r d^2\Omega_{r'} \end{aligned}$$

$$K_{33}^{\kappa\lambda'}(r, r') =$$

$$(-)^{\ell_{12} + \ell_{12-34} + \ell_{124-3}} \left(\frac{5}{2}\right)^3 G(r) \times$$

$$\int \left[\varphi^{\ell_{12}}(\vec{q}_1') \otimes \varphi^{\ell_{34}}(2\vec{r} - \frac{5}{2}\vec{r}') \otimes Y^{\ell_{12-34}}(\hat{r}) \right]^{I, \kappa} \otimes$$

$$\left[\varphi^{\tilde{\ell}_{12}}\left(\frac{1}{4}\vec{q}_1' + \frac{5}{2}\vec{r} - \frac{15}{8}\vec{r}'\right) \otimes \varphi^{\ell_{12-4}}\left(\frac{15}{16}\vec{q}_1' - \frac{5}{8}\vec{r} + \frac{15}{32}\vec{r}'\right) \otimes Y^{\ell_{124-3}}(\hat{r}') \right]^{I, \lambda'}$$

$$d^3\vec{q}_1 d^2\Omega_r d^2\Omega_{r'}$$

(A1.11)

$$K_{34}^{\kappa\lambda'}(r, r') =$$

$$(-)^{\ell_{34} + \ell_{12-34} + \ell_{124-3}} \left(-\frac{5}{2}\right)^3 G(r) \times$$

$$\int \left[\varphi^{\ell_{12}}(-2\vec{r} - \frac{5}{2}\vec{r}') \otimes \varphi^{\ell_{34}}(\vec{q}_1') \otimes Y^{\ell_{12-34}}(\hat{r}) \right]^{I, \kappa} \otimes$$

$$\left[\varphi^{\tilde{\ell}_{12}}\left(\frac{1}{4}\vec{q}_1' - \frac{5}{2}\vec{r} - \frac{15}{8}\vec{r}'\right) \otimes \varphi^{\ell_{12-4}}\left(\frac{3}{16}\vec{q}_1' + \frac{1}{8}\vec{r} + \frac{35}{32}\vec{r}'\right) \otimes Y^{\ell_{124-3}}(\hat{r}') \right]^{I, \lambda'}$$

$$d^3\vec{q}_1 d^2\Omega_r d^2\Omega_{r'}$$

Entsprechend lauten die Potentialmatrixelemente $K_{49}^{\kappa\lambda'}$:

$$\begin{aligned}
 & K_{41}^{\kappa\lambda'}(r, r') \\
 &= \left(\frac{5}{2}\right)^3 \int \left[\varphi^{\ell_{12}}(\vec{q}_1) \otimes \varphi^{\ell_{34}}(2\vec{r} - \frac{5}{2}\vec{r}') \otimes Y^{\ell_{12}-34}(\hat{r}) \right]^{I, \kappa} \otimes \\
 & \left[\left(V_{C-\alpha}^0 \left(\frac{1}{4}\vec{q}_1 + \frac{1}{2}\vec{r} + \frac{5}{8}\vec{r}' \right) + V_{\alpha-\alpha}^0 \left(-\frac{3}{4}\vec{q}_1 + \frac{1}{2}\vec{r} + \frac{5}{8}\vec{r}' \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + V_{C-C}^0 \left(\frac{1}{4}\vec{q}_1 + \frac{5}{2}\vec{r} - \frac{15}{8}\vec{r}' \right) + V_{C-\alpha}^0 \left(-\frac{3}{4}\vec{q}_1 + \frac{5}{2}\vec{r} - \frac{15}{8}\vec{r}' \right) \right) \right]^0 \otimes \\
 & \left[\varphi^{\tilde{\ell}_{12}}(\vec{q}_1) \otimes \varphi^{\ell_{12}-4} \left(\frac{5}{2}\vec{r} - \frac{15}{8}\vec{r}' \right) \otimes Y^{\ell_{12}-3}(\hat{r}') \right]^{I, \lambda'} \\
 & d^3\vec{q}_1 d^2\Omega_r d^2\Omega_{r'}
 \end{aligned}
 \tag{A1.12}$$

Es gilt hier dieselbe Basis wie in den Fällen $K_{31}^{\kappa\lambda'}$ und $K_{33}^{\kappa\lambda'}$.

Bei $K_{42}^{\kappa\lambda'}$ und $K_{44}^{\kappa\lambda'}$ nehmen wir die Basis von $K_{32}^{\kappa\lambda'}$ und $K_{34}^{\kappa\lambda'}$. Wir erhalten dann:

$$K_{42}^{\kappa\lambda'}(r, r') =$$

$$\left(-\frac{5}{2}\right)^3 \int \left[\varphi^{\ell_{12}}(-2\vec{r} - \frac{5}{2}\vec{r}') \otimes \varphi^{\ell_{24}}(\vec{q}_1') \otimes Y^{\ell_{12-34}}(\hat{r}) \right]^{I, \kappa} \otimes$$

$$\left[\left(V_{C-\alpha}^{\circ} \left(\frac{3}{4}\vec{q}_1' + \frac{1}{2}\vec{r} - \frac{5}{8}\vec{r}' \right) + V_{\alpha-\alpha}^{\circ} \left(\frac{3}{4}\vec{q}_1' + \frac{5}{2}\vec{r} + \frac{15}{8}\vec{r}' \right) \right. \right. \quad (A1.13)$$

$$\left. + V_{C-C}^{\circ} \left(-\frac{1}{4}\vec{q}_1' + \frac{1}{2}\vec{r} - \frac{5}{8}\vec{r}' \right) + V_{C-\alpha}^{\circ} \left(-\frac{1}{4}\vec{q}_1' + \frac{5}{2}\vec{r} + \frac{15}{8}\vec{r}' \right) \right]^{I, \kappa}$$

$$\left[\varphi^{\tilde{\ell}_{12}}(\vec{q}_1') \otimes \varphi^{\ell_{12-4}} \left(-\frac{5}{2}\vec{r} - \frac{15}{8}\vec{r}' \right) \otimes Y^{\ell_{124-3}}(\hat{r}') \right]^{I, \lambda'}$$

$$d^3\vec{q}_1' d^2\Omega_r d^2\Omega_{r'}$$

$$K_{43}^{\kappa\lambda'}(r, r') = (-)^{\ell_{12} + \ell_{12-34} + \ell_{124-3}} \times$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^3 \int \left[\varphi^{\ell_{12}}(\vec{q}_1') \otimes \varphi^{\ell_{34}}(2\vec{r} - \frac{5}{2}\vec{r}') \otimes Y^{\ell_{12-34}}(\hat{r}) \right]^{I, \kappa} \otimes$$

(A1.14)

$$\left[\left(V_{C-\alpha}^{\circ} \left(\frac{1}{4}\vec{q}_1' + \frac{1}{2}\vec{r} + \frac{5}{8}\vec{r}' \right) + V_{\alpha-\alpha}^{\circ} \left(-\frac{3}{4}\vec{q}_1' + \frac{1}{2}\vec{r} + \frac{5}{8}\vec{r}' \right) \right. \right.$$

$$\left. + V_{C-C}^{\circ} \left(\frac{1}{4}\vec{q}_1' + \frac{5}{2}\vec{r} - \frac{15}{8}\vec{r}' \right) + V_{C-\alpha}^{\circ} \left(-\frac{3}{4}\vec{q}_1' + \frac{5}{2}\vec{r} - \frac{15}{8}\vec{r}' \right) \right]^{I, \kappa}$$

$$\left[\varphi^{\tilde{\ell}_{12}} \left(\frac{1}{4}\vec{q}_1' + \frac{5}{2}\vec{r} - \frac{15}{8}\vec{r}' \right) \otimes \varphi^{\ell_{12-4}} \left(\frac{15}{16}\vec{q}_1' - \frac{5}{8}\vec{r} + \frac{15}{32}\vec{r}' \right) \otimes Y^{\ell_{124-3}}(\hat{r}') \right]^{I, \lambda'}$$

$$d^3\vec{q}_1' d^2\Omega_r d^2\Omega_{r'}$$

$$K_{44}^{\kappa\lambda'}(r, r') = (-)^{\ell_{34} + \ell_{12-34} + \ell_{124-3}} \left(-\frac{5}{2}\right)^3.$$

$$\int \left[\varphi^{\ell_{12}} \left(-2\vec{r} - \frac{5}{2}\vec{r}' \right) \otimes \varphi^{\ell_{34}}(\vec{q}) \otimes Y^{\ell_{12-34}}(\hat{r}) \right]^{I, \kappa} \otimes \quad (A1.15)$$

$$\left[\left(V_{c-\alpha}^{\circ} \left(\frac{3}{4}\vec{q}_1 + \frac{1}{2}\vec{r} - \frac{5}{8}\vec{r}' \right) + V_{\alpha-\omega}^{\circ} \left(\frac{3}{4}\vec{q}_1 + \frac{5}{2}\vec{r} + \frac{15}{8}\vec{r}' \right) \right. \right. \\ \left. \left. + V_{c-c}^{\circ} \left(-\frac{1}{4}\vec{q}_1 + \frac{1}{2}\vec{r} - \frac{5}{8}\vec{r}' \right) + V_{c-\alpha}^{\circ} \left(-\frac{1}{4}\vec{q}_1 + \frac{5}{2}\vec{r} + \frac{15}{8}\vec{r}' \right) \right) \right]^{\circ} \otimes$$

$$\left[\varphi^{\tilde{\ell}_{12}} \left(\frac{1}{4}\vec{q}_1 - \frac{5}{2}\vec{r} - \frac{15}{8}\vec{r}' \right) \otimes \varphi^{\ell_{12-4}} \left(\frac{3}{16}\vec{q}_1 + \frac{1}{8}\vec{r} + \frac{35}{32}\vec{r}' \right) \otimes Y^{\ell_{124-3}}(\hat{r}') \right]^{I, \lambda'}$$

$$d^3\vec{q}_1 d^2\Omega_r d^2\Omega_{r'}$$

Anhang A2 Die Umkopplung der Wellenfunktionen

Die in diesem Abschnitt vorgeführten Umkopplungen basieren auf den in Ref. 26) entwickelten Techniken. Wir haben für die Aufstellung der Wellenfunktionen eine Schreibweise der Kopplung gewählt, die die Summation über die magnetischen Quantenzahlen in folgender Weise enthält:

$$\left[\varphi^{\ell_1} \otimes \varphi^{\ell_2} \right]_m^{\ell} = \sum_{m_1 m_2} (\ell_1 m_1 \ell_2 m_2 | \ell m) \varphi_{m_1}^{\ell_1} \varphi_{m_2}^{\ell_2} \quad (\text{A2.1})$$

Die Funktionen $\varphi_{m_i}^{\ell_i}$ werden nach folgender Vorschrift in Radial- und Winkelanteil zerlegt:

$$\varphi_m^{\ell}(\vec{r}) = \varphi_{\ell}(r) Y_m^{\ell}(\Omega_r) \quad (\text{A2.2})$$

wobei für die Kugelfunktionen die Biedenharn'sche Phasenkonvention gewählt wurde, um kontragradiantes Transformationsverhalten zu bekommen:

$$Y_m^{\ell}(\Omega_r) = (-i)^{\ell} Y_{\ell m}(\Omega_r) = (-)^{\ell + \frac{1}{2}} Y_{\ell m}(\Omega_r) \quad (\text{A2.3})$$

Aus dem Symmetrieverhalten der Clebsch - Gordan - Koeffizienten folgt direkt:

$$\left[\varphi^{\ell_1} \otimes \varphi^{\ell_2} \right]_m^{\ell} = (-)^{\ell_1 + \ell_2 - \ell} \left[\varphi^{\ell_2} \otimes \varphi^{\ell_1} \right]_m^{\ell} \quad (\text{A2.4})$$

Bei der Transformation eines Kopplungsschemas für vier Drehimpulse in ein anderes tauchen als Transformationskoeffizienten die 9-j-Symbole auf, die zwei Zwischendrehimpulse enthalten, über die summiert werden muß. In kontragradienter Darstellung ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 & \left[[\varphi^a \otimes \varphi^b]^c \otimes [\varphi^d \otimes \varphi^e]^f \right]_{m_1}^g = \\
 & \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ \lambda_1 & \lambda_2 & g \end{bmatrix} \left[[\varphi^a \otimes \varphi^d]^{\lambda_1} \otimes [\varphi^b \otimes \varphi^e]^{\lambda_2} \right]_{m_1}^g \quad (A2.5)
 \end{aligned}$$

Figur (A2.1) zeigt das dazugehörige graphische Schema:

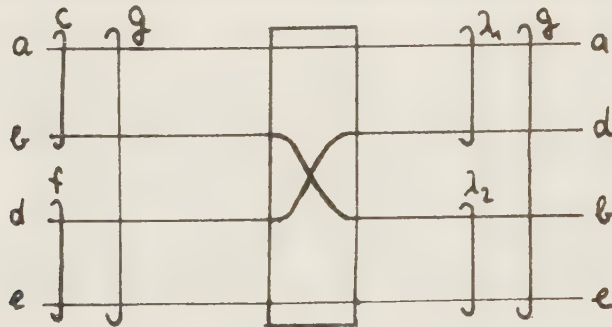


Fig. (A2.1)

Die Transformationskoeffizienten sind mit den üblichen ²⁴⁾ 9-j-Symbolen wie folgt verknüpft:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ \lambda_1 & \lambda_2 & g \end{bmatrix} = \hat{C} \hat{f} \hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ \lambda_1 & \lambda_2 & g \end{Bmatrix} \quad (A2.6)$$

mit $\hat{C} = \sqrt{2c+1}$ etc.

Die Umkopplung von drei Drehimpulsen ergibt sich als Spezialfall von (A2.5). Dazu schieben wir eine "nahrhafte Null" 1^0 ein. Aus (A2.1) folgt zudem:

$$\varphi^e = [\varphi^e \otimes 1^0]^0 = [1^0 \otimes \varphi^e]^e \quad (A2.7)$$

Die Umkopplung von drei Drehimpulsen sieht dann so aus:

$$\left[[\varphi^a \otimes \varphi^b]^c \otimes \varphi^d \right]^e_m \quad (A2.8a)$$

$$= \sum_{\lambda_1} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & d \\ \lambda_1 & b & e \end{bmatrix} \left[[\varphi^a \otimes \varphi^d]^{\lambda_1} \otimes \varphi^b \right]^e_m$$

$$= \sum_{\lambda_2} \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & d \\ a & \lambda_2 & e \end{bmatrix} \left[\varphi^a \otimes [\varphi^b \otimes \varphi^d]^{\lambda_2} \right]^e_m \quad (A2.8b)$$

Der Fall (A2.8a) ist in Fig. (A2.2a) dargestellt, (A2.8b) wird in Fig. (A2.2b) behandelt.

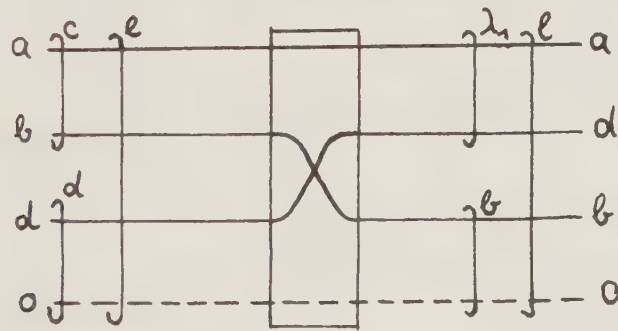


Fig. (A2.2a)

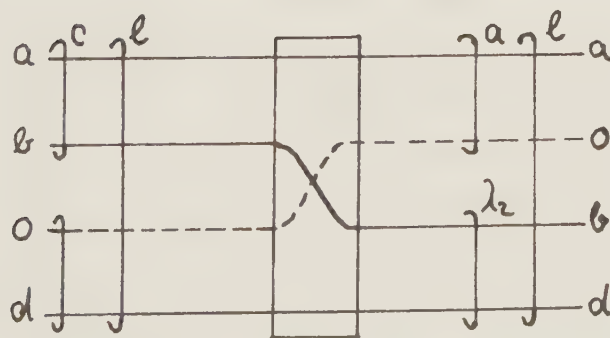


Fig. (A2.2b)

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & d & 0 \\ e & f & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & d & e \\ b & d & f \\ c & 0 & c \end{bmatrix} = \frac{\hat{e} \hat{f}}{\hat{d}} (-)^{a+f+c+d} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ f & e & d \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & a & 0 \\ b & c & d \\ e & f & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & e \\ a & c & f \\ 0 & d & d \end{bmatrix} = \frac{\hat{e} \hat{f}}{\hat{a}} (-)^{a+d+e+c} \begin{Bmatrix} a & b & e \\ d & f & c \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 & a \\ b & c & d \\ e & c & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & e \\ 0 & c & c \\ a & d & f \end{bmatrix} = \frac{\hat{d} \hat{e}}{\hat{a}} (-)^{a+b+c+f} \begin{Bmatrix} a & b & e \\ c & f & d \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & c \\ f & f & 0 \end{bmatrix} = \frac{\hat{a} \hat{f}}{\hat{c}} (-)^{f+d+b+c} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ e & d & f \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & d \\ e & b & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & d & d \\ b & a & c \\ b & e & f \end{bmatrix} = \frac{\hat{c} \hat{e}}{\hat{a}} (-)^{c+e+b+d} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ f & d & e \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & a & 0 \\ 0 & b & b \\ a & c & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ a & b & c \\ 0 & b & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ b & b & 0 \\ c & b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & b & b \\ a & 0 & a \end{bmatrix} = \frac{\hat{c}}{\hat{a} \hat{b}} (-)^{a+b-c}$$

$$\begin{bmatrix} a & a & 0 \\ b & a & c \\ c & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & a & 0 \\ 0 & c & c \end{bmatrix} = \frac{1}{\hat{a}} (-)^{a+c-b}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a & a \\ b & b & 0 \\ b & c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b & b \\ a & b & c \\ a & 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ b & 0 & b \\ c & a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & 0 & a \\ 0 & b & b \end{bmatrix} = \frac{\hat{c}}{\hat{a} \hat{b}}$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & b \\ a & b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ b & c & a \\ c & c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & c & c \\ a & a & 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a & a \\ b & 0 & b \\ b & a & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & a \\ b & c & a \\ b & b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & b & a \\ a & 0 & a \\ b & b & 0 \end{bmatrix} = (-)^{a+b-c}$$

$$\begin{bmatrix} a & a & 0 \\ a & b & c \\ 0 & c & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a & c \\ a & a & 0 \\ c & 0 & c \end{bmatrix} = \frac{1}{\hat{a}}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ b & b & 0 \\ c & c & 0 \end{bmatrix} = \frac{\hat{c}}{\hat{a} \hat{b}} \quad \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & a \\ a & 0 & a \end{bmatrix} = \frac{1}{\hat{a}} (-)^{2a}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & c & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ b & 0 & b \\ c & 0 & c \end{bmatrix} = 1$$

Die $^{20}\text{Ne} - ^{12}\text{C}$ -Wellenfunktion wird in sechs Schritten umgekoppelt:

$$\begin{aligned} \psi_{123-4}^{I\lambda} &= \sum_{N_1 \dots N_5} (-)^{\tilde{j}_3 + \tilde{j}_4 - N_2} \begin{bmatrix} \tilde{j}_{123} & \tilde{\ell}_{123} & \tilde{I}_{123} \\ \tilde{j}_4 & 0 & \tilde{j}_4 \\ N_1 & \tilde{\ell}_{123} & \tilde{J} \end{bmatrix} \cdot \\ &\begin{bmatrix} \tilde{j}_{12} & \tilde{\ell}_{12} & \tilde{I}_{12} \\ N_2 & 0 & N_2 \\ N_3 & \tilde{\ell}_{12} & N_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_3 & \tilde{\ell}_{12} & N_1 \\ 0 & \tilde{\ell}_{123} & \tilde{\ell}_{123} \\ N_3 & N_4 & \tilde{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_3 & N_4 & \tilde{J} \\ 0 & \tilde{\ell} & \tilde{\ell} \\ N_3 & N_5 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_{12} & \tilde{j}_3 & \tilde{j}_{123} \\ 0 & \tilde{j}_4 & \tilde{j}_4 \\ \tilde{I}_{12} & N_2 & N_1 \end{bmatrix} \cdot \quad (A2.10) \\ &\left[X_{1,2,3,4}^{N_3 \lambda} \otimes \left[\left[\varphi_{12}^{\tilde{\ell}_{12}} \otimes \varphi_{12-3}^{\tilde{\ell}_{123}} \right]^{N_4 \lambda} \otimes Y_{123-4}^{\tilde{\ell}} \right]^{N_5 \lambda} \right]^{I \lambda} \end{aligned}$$

Fig. (A2.4) verdeutlicht dies wieder graphisch.

Für die in dieser Arbeit auferlegte Beschränkung auf Cluster-Grundzustände ($j_1, \tilde{j}_1 = 0$ für alle i) und $^{12}\text{C} - \alpha$ - Relativdrehimpulse gleich null (d.h.: l_{12}, l_{34} und $\tilde{l}_{12} = 0$) brechen die Summen über die Zwischen-drehimpulse zusammen und wir bekommen:

$$\begin{aligned} \psi_{12-34}^{I\kappa} &= \\ &\left[X_{1,2,3,4}^0 \otimes \left[\left[\varphi_{12}^0 \otimes \varphi_{34}^0 \right]^{0\kappa} \otimes Y_{12-34}^I \right]^{I\kappa} \right]^{I\kappa} \quad (A2.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{123-4}^{I\lambda} &= \\ &\left[X_{1,2,3,4}^0 \otimes \left[\left[\varphi_{12}^0 \otimes \varphi_{12-3}^{\tilde{\ell}_{123}} \right]^{\tilde{\ell}_{123} \lambda} \otimes Y_{123-4}^{\tilde{\ell}} \right]^{I\lambda} \right]^{I\lambda} \quad (A2.12) \end{aligned}$$

Anhang A3 Die Winkelintegration

Das Integral aus (IV.10) lautete:

$$\int \psi^* \psi = \int d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3$$

$$\left[\left[\left[Y_{(\Omega_1)}^{\ell_1} \otimes \left[\left[Y_{(\Omega_1)}^{\ell_1} \otimes Y_{(\Omega_2)}^{\ell_2} \right]^{\lambda_1} Y_{(\Omega_3)}^{\ell_3} \right]^{\ell_6} \right]^J \otimes Y_{(\Omega_2)}^{\ell_{ab}} \right]^I \otimes \right. \quad (A3.1)$$

$$\left. \left[\left[\left[Y_{(\Omega_1)}^{\ell_4} \otimes Y_{(\Omega_2)}^{\ell_5} \right]^{\lambda_2} Y_{(\Omega_3)}^{\ell_6} \right]^{\ell_c} \left[\left[Y_{(\Omega_1)}^{\ell_1} \otimes Y_{(\Omega_2)}^{\ell_2} \right]^{\lambda_3} Y_{(\Omega_3)}^{\ell_3} \right]^{\ell_d} \right]^{\tilde{J}} \otimes Y_{(\Omega_3)}^{\ell_{cd}} \right]^I \right]^0$$

Dieser Ausdruck muß derart umgekoppelt werden, daß Kugelfunktionen mit gleichen Argumenten zusammengekoppelt sind und kontrahiert werden können:

$$\left[Y_{(\Omega)}^{\ell_1} \otimes Y_{(\Omega)}^{\ell_2} \right]_M^L = Q_{\ell_1 \ell_2}^L Y_M^L(\Omega) \quad (A3.2)$$

$$\text{mit } Q_{\ell_1 \ell_2}^L = (-)^{\frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2 + L)} \frac{\hat{\ell}_1 \hat{\ell}_2}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es sei nochmals erwähnt, daß wir im wesentlichen die von Danos (Ref. 26) entwickelte Technik anwenden. Der Ausdruck (A3.1) ist eine Invariante, das heißt, er ändert sich bei räumlicher Drehung nicht. Das ist nur dann erfüllt, wenn die Kugelfunktionen der einzelnen Variablen für sich zu null gekoppelt sind, so daß nach der Umkopplung und Kontraktion das Integral

$$\int Y_0^0(\Omega_1) Y_0^0(\Omega_2) Y_0^0(\Omega_3) d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3 = (4\pi)^{3/2} \quad (A3.3)$$

übrigbleibt.

In Fig. (A3.1) ist das graphische Kopplungsschema dargestellt. Es ist stets ratsam das Problem erst graphisch zu lösen; die Kopplungskoeffizienten lassen sich dann aus der Zeichnung ablesen. Zudem ist es in praktischen Rechnungen wegen der Unüberschaubarkeit der möglichen Identitätsrelationen zwischen 3-j-, 6-j- und 9-j-Symbolen bei komplizierteren Systemen äußerst schwierig, optimal - das heißt, mit möglichst wenig Zwischendrehimpulsen - zu koppeln. Hier müssen neun Umkopplungsschritte vorgenommen werden. Das Ergebnis ist:

$$\int \psi^* \psi = \sum_{\substack{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \\ \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6}} (-1)^{l_a + l_b - j} \hat{\Lambda}_2 \begin{bmatrix} l_b & l_a & j \\ 0 & l_{ab} & l_{ab} \\ l_b & \Lambda_1 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_b & \Lambda_1 & I \\ \tilde{j} & l_{cd} & I \\ \Lambda_2 & \Lambda_2 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \lambda_2 & l_b & l_c \\ \lambda_3 & l_3 & l_d \\ \Lambda_3 & \Lambda_4 & \tilde{j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_4 & l_5 & \lambda_2 \\ l_7 & l_8 & \lambda_3 \\ \Lambda_5 & \Lambda_6 & \Lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & l_3 & l_b \\ \Lambda_3 & \Lambda_4 & \tilde{j} \\ \Lambda_1 & l_{cd} & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & \lambda_1 \\ \Lambda_5 & \Lambda_6 & \Lambda_3 \\ l_a & l_{ab} & \Lambda_1 \end{bmatrix} \quad (A3.4)$$

$$\times Q_{l_b l_3}^{\Lambda_4} Q_{l_3 \Lambda_4}^{l_{cd}} Q_{l_4 l_7}^{\Lambda_5} Q_{l_1 \Lambda_5}^{l_a} Q_{l_5 l_8}^{\Lambda_6} Q_{l_2 \Lambda_6}^{l_{ab}}$$

Im weiteren geben wir noch die in unseren Rechnungen auftretenden Spezialfälle an. Vorab sei auf folgende Identität hingewiesen, die in den Graphen durch eine vertikale gestrichelte Linie dargestellt ist:

$$[Y^a \circ [Y^b \circ Y^c]^a]^o = [[Y^a \circ Y^b]^c \circ Y^c]^o \quad (A3.5)$$

Diese Beziehung folgt durch Einsetzen in (A2.8a,b).

Der allgemeinste bei uns auftretende Fall ist :

$$l_a = l_c = 0 ; l_b \text{ und } l_d \neq 0 .$$

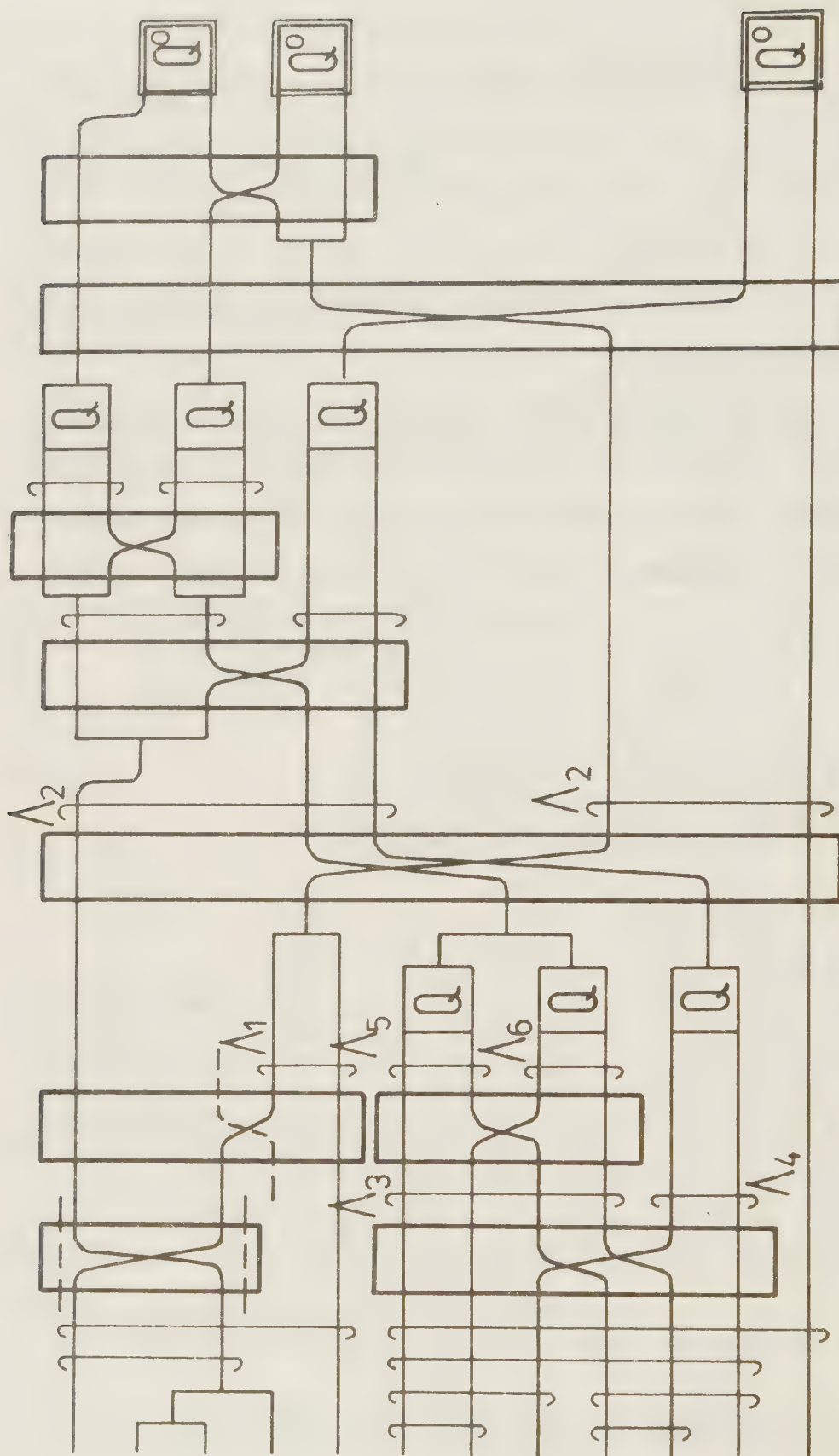


Fig.A 3.1

Dann folgt mit dem Schema aus Fig. (A3.2) :

$$\int \Psi^* \Psi = \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} (-)^{l_{ab} + l_c - I + \lambda_3 - \lambda_2 + l_5 - l_6} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} \lambda_3 & l_3 & l_d \\ 0 & l_d & l_{cd} \\ \lambda_3 & \lambda_1 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & l_3 & l_6 \\ \lambda_3 & \lambda_1 & I \\ \lambda_2 & l_6 & l_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & \lambda_1 \\ l_3 & l_3 & \lambda_3 \\ l_4 & \lambda_3 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{ab} & 0 & l_{ab} \\ \lambda_3 & l_4 & \lambda_2 \\ l_5 & l_4 & l_6 \end{bmatrix} \cdot \quad (A3.6)$$

$$\cdot Q_{l_3 l_d}^{\lambda_1} Q_{l_3 \lambda_1}^{l_6} Q_{l_1 l_2}^{l_4} Q_{l_2 l_3}^{\lambda_3} Q_{l_{ab} \lambda_3}^{l_5} \delta_{J l_6} \delta_{J l_d} \delta_{\lambda_2 l_6}$$

$$\equiv W_1(l_b, l_d, l_{ab}, l_{cd}, I, l_1, \dots, l_9, \lambda_1, \lambda_3)$$

Es ist empfehlenswert, jeden Spezialfall gesondert graphisch zu optimieren. Bloßes Einsetzen der entsprechenden Nullen in (A3.4) würde auf vier Zwischendrehimpulse führen, wobei jedoch aufgrund von Identitätsrelationen einer redundant wäre. Es ist aber bedeutend schwieriger, diese Identitäten zwischen den Drehimpulskoeffizienten algebraisch zu behandeln, als das graphische Schema mit Einbeziehung der auftretenden Nullen neu zu optimieren. Schon nach recht kurzer Beschäftigung mit der graphischen Methode findet man bereits nach kurzem Probieren die beste Umkopplung, was bedeutet, daß man keine redundanten Zwischendrehimpulssummen mitschleppt.

Fig. (A3.3) zeigt die zeichnerische Behandlung des Falles: $l_a = l_b = l_c$; $l_d \neq 0$.

Wir erhalten eine Summe über zwei Zwischendrehimpulse, in der nur noch ein "echtes" 9-j-Symbol auftaucht, die anderen beiden kann man gemäß Tab. (A2.1) in 6-j-Symbole umformen.

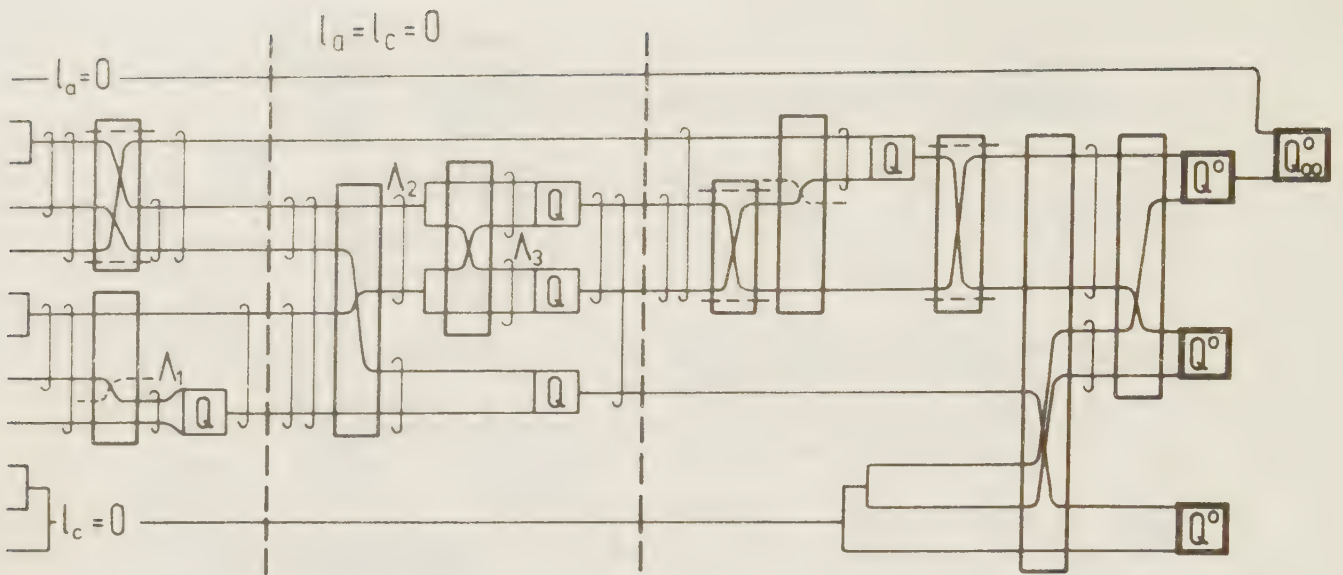


Fig.A3.2

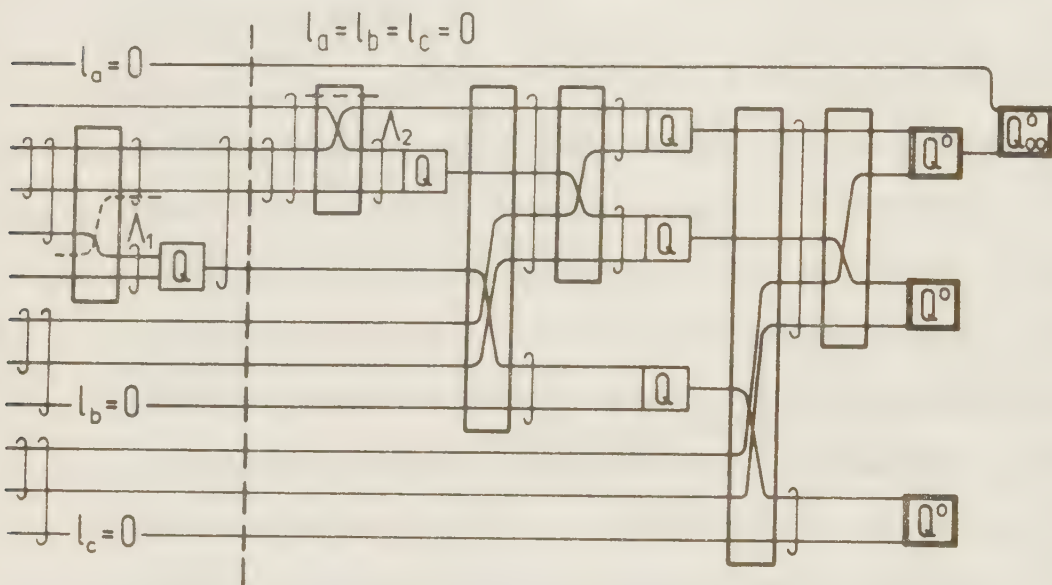


Fig.A3.3

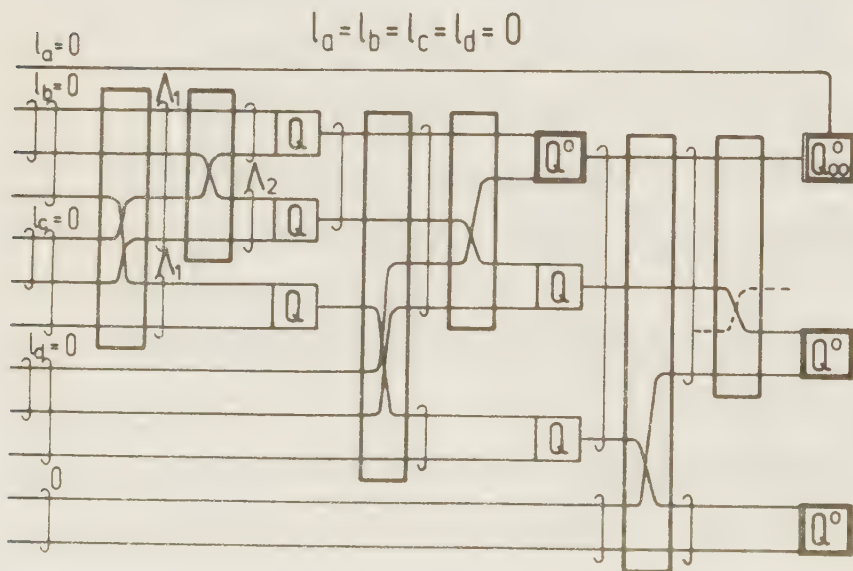


Fig.A3.4

$$\begin{aligned}
 \int \star (\Psi^* \Psi) &= \sum_{\Lambda_1 \Lambda_2} \frac{\hat{\ell}_6}{\hat{\ell}_3 \hat{\Lambda}_1} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \star \\
 &\times \begin{bmatrix} \lambda_3 & \ell_3 & \ell_d \\ 0 & \ell_{cd} & \ell_{cd} \\ \lambda_3 & \Lambda_1 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I & I \\ \ell_7 & \ell_8 & \lambda_3 \\ \ell_7 & \Lambda_2 & \Lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_7 & \Lambda_2 & \Lambda_1 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ \ell_4 & \ell_5 & \ell_6 \end{bmatrix} \star \\
 &\times Q_{\ell_3 \ell_{cd}}^{\Lambda_1} Q_{\Lambda_1 \ell_3}^{\ell_6} Q_{I \ell_8}^{\Lambda_2} Q_{\Lambda_2 \ell_2}^{\ell_5} Q_{\ell_7 \ell_1}^{\ell_4} \delta_{J0} \delta_{\tilde{J} \ell_d} \delta_{\lambda_2 \ell_6} \delta_{\lambda_1 \ell_3} \delta_{\ell_{cd} I} \\
 &\equiv W_2(\ell_d, \ell_{cd}, I, \ell_1, \dots, \ell_9, \lambda_3)
 \end{aligned} \tag{A3.7}$$

Analog koppeln wir für $\ell_a = \ell_c = \ell_d = 0$; $\ell_b \neq 0$ um:

$$\begin{aligned}
 \int \star (\Psi^* \Psi) &= \sum_{\Lambda_1 \Lambda_2} (-)^{\ell_b - \ell_{ab} + I} \frac{\hat{\ell}_6}{\hat{\ell}_3 \hat{\Lambda}_1} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \star \\
 &\times \begin{bmatrix} \lambda_1 \ell_3 & \ell_6 \\ 0 & I & I \\ \lambda_1 & \Lambda_1 & \ell_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \ell_{ab} & \ell_{ab} \\ \ell_1 & \ell_2 & \lambda_1 \\ \ell_1 & \Lambda_2 & \Lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_1 & \Lambda_2 & \Lambda_1 \\ \ell_7 & \ell_8 & \ell_9 \\ \ell_4 & \ell_5 & \ell_6 \end{bmatrix} \star \\
 &\times Q_{\ell_1 \ell_7}^{\ell_4} Q_{\ell_3 I}^{\Lambda_1} Q_{\Lambda_1 \ell_9}^{\ell_6} Q_{\ell_{ab} \ell_2}^{\Lambda_2} Q_{\Lambda_2 \ell_8}^{\ell_5} \delta_{J \ell_b} \delta_{\tilde{J} 0} \delta_{\lambda_2 \ell_6} \delta_{\lambda_3 \ell_9} \delta_{\ell_{ab} I} \\
 &\equiv W_3(\ell_b, \ell_{ab}, I, \ell_1, \dots, \ell_9, \lambda_1)
 \end{aligned} \tag{A3.8}$$

Wenn alle vier Kerndrehimpulse null sind, d.h.: $\ell_a = \ell_b = \ell_c = \ell_d = 0$, bekommen wir aus Fig. (A3.4):

$$\begin{aligned}
 \int \star (\Psi^* \Psi) &= \sum_{\Lambda_1 \Lambda_2} \frac{\hat{\ell}_7}{\hat{\ell}_3 \hat{\ell}_6 \hat{\ell}_9} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ \ell_4 & \ell_5 & \ell_6 \\ \ell_7 & \Lambda_2 & \Lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_7 & \Lambda_2 & \Lambda_1 \\ \ell_7 & \ell_8 & \ell_9 \\ 0 & I & I \end{bmatrix} \star \\
 &\times Q_{\ell_1 \ell_4}^{\ell_7} Q_{\ell_2 \ell_5}^{\Lambda_2} Q_{\Lambda_2 \ell_8}^I Q_{\ell_3 \ell_6}^{\Lambda_1} Q_{\Lambda_1 \ell_9}^I \cdot \delta_{J0} \delta_{\tilde{J} 0} \delta_{\lambda_1 \ell_3} \star \tag{A3.9}
 \end{aligned}$$

$$\star \delta_{\lambda_2 \ell_6} \delta_{\lambda_3 \ell_9} \delta_{\ell_{ab} I} \delta_{\ell_{cd} I} \equiv W_4(I, \ell_1, \dots, \ell_9)$$

Das Winkelintegral in (V.13) wird gemäß Fig. A2.5) umgekoppelt. Wir erhalten:

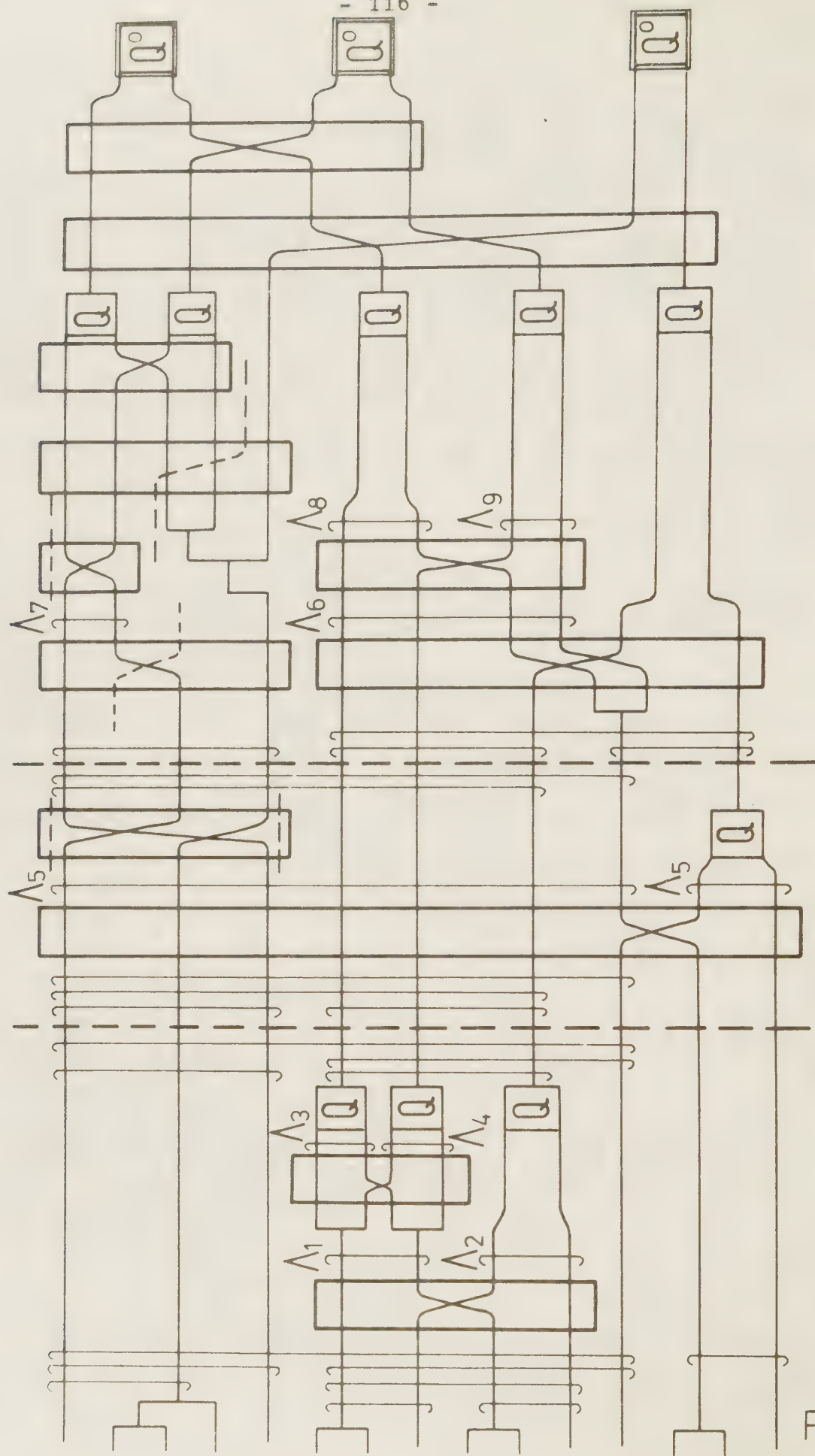


Fig. A3.5

$$\begin{aligned}
 \int \star (\psi^* V \psi) &= \sum_{\Lambda_1 \dots \Lambda_9} \frac{1}{\tilde{L}_{cd}} (-)^{J-I+\Lambda_a-\Lambda_3} \begin{bmatrix} \lambda_2 & \ell_b & \ell_c \\ \lambda_3 & \ell_g & \ell_d \\ \Lambda_1 & \Lambda_2 & \tilde{J} \end{bmatrix} \\
 &\times \begin{bmatrix} \ell_4 & \ell_5 & \lambda_2 \\ \ell_7 & \ell_8 & \lambda_3 \\ \Lambda_3 & \Lambda_4 & \Lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 & \tilde{J} \\ \ell_{12} & \Lambda_5 & \ell_{cd} \\ \Lambda_6 & \ell_3 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_{ab} & 0 & \ell_{ab} \\ \ell_a & \ell_b & \tilde{J} \\ \Lambda_7 & \ell_8 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_3 & \Lambda_4 & \Lambda_1 \\ \ell_{10} & \ell_{11} & \ell_{12} \\ \Lambda_8 & \Lambda_9 & \Lambda_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_a & \ell_{ab} & \lambda_2 \\ \ell_1 & \ell_2 & \lambda_1 \\ \Lambda_8 & \Lambda_9 & \Lambda_6 \end{bmatrix} \\
 &\times \begin{bmatrix} \Lambda_3 & 0 & \Lambda_1 \\ \lambda_1 & \ell_3 & \ell_b \\ \Lambda_6 & \ell_3 & I \end{bmatrix} Q_{\ell_4 \ell_7}^{\Lambda_3} Q_{\Lambda_3 \ell_{10}}^{\Lambda_8} Q_{\ell_a \ell_1}^{\Lambda_8} Q_{\ell_b \ell_9}^{\Lambda_2} \\
 &\times Q_{\Lambda_2 \Lambda_5}^{\ell_3} Q_{\Lambda_5 \ell_{cd}}^{\ell_{12}} Q_{\ell_5 \ell_8}^{\Lambda_4} Q_{\Lambda_4 \ell_{11}}^{\Lambda_9} Q_{\ell_a \ell_2}^{\Lambda_9}
 \end{aligned} \quad (A3.10)$$

Wie schon bei den reinen Überlappintegralen möchten wir auch hier die in unseren Rechnungen auftretenden Fälle anführen.

$l_a = l_c = 0$; $l_b \neq l_d \neq 0$ führt nach Fig. (A3.6) auf:

$$\begin{aligned}
 \int \star (\psi^* V \psi) &= \sum_{\Lambda_1 \dots \Lambda_6} (-)^{\ell_b + \ell_{ab} - I} \frac{1}{\tilde{L}_b} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{bmatrix} \lambda_3 & \ell_g & \ell_d \\ 0 & \ell_{cd} & \ell_{cd} \\ \lambda_1 & \Lambda_1 & I \end{bmatrix} \\
 &\times \begin{bmatrix} \lambda_1 & \ell_3 & \ell_b \\ \lambda_3 & \Lambda_1 & I \\ \Lambda_2 & \Lambda_3 & \ell_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \ell_2 & \lambda_1 \\ \ell_7 & \ell_8 & \lambda_3 \\ \Lambda_4 & \Lambda_5 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \ell_{ab} & \ell_{ab} \\ \Lambda_4 & \Lambda_5 & \Lambda_2 \\ \Lambda_4 & \Lambda_6 & \Lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_4 & \Lambda_6 & \Lambda_3 \\ \ell_4 & \ell_5 & \ell_b \\ \ell_{10} & \ell_{11} & \ell_{12} \end{bmatrix} Q_{\ell_g \ell_{cd}}^{\Lambda_1} \\
 &\times Q_{\ell_3 \Lambda_1}^{\Lambda_3} Q_{\ell_b \ell_{12}}^{\Lambda_3} Q_{\ell_1 \ell_7}^{\Lambda_4} Q_{\Lambda_4 \ell_4}^{\ell_{10}} Q_{\ell_2 \ell_8}^{\Lambda_5} Q_{\ell_{ab} \Lambda_5}^{\Lambda_6} \\
 &\times Q_{\Lambda_6 \ell_5}^{\ell_{11}} \delta_{\tilde{J} \ell_b} \delta_{\tilde{J} \ell_d} \delta_{\lambda_2 \ell_b}
 \end{aligned} \quad (A3.11)$$

Die beiden Möglichkeiten mit drei Drehimpulsen gleich null werden wie in Fig. (A3.7) umgekoppelt. Im einzelnen folgt:

Für $l_a = l_b = l_c = 0$; $l_d \neq 0$:

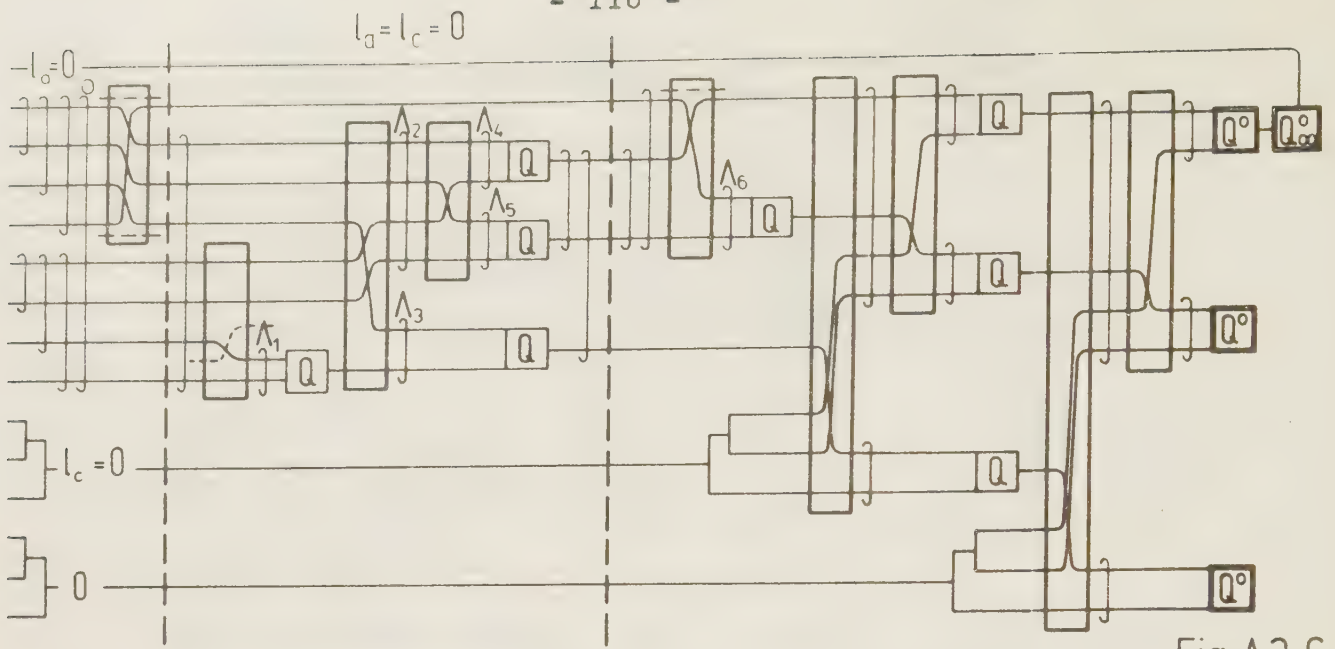


Fig. A3.6

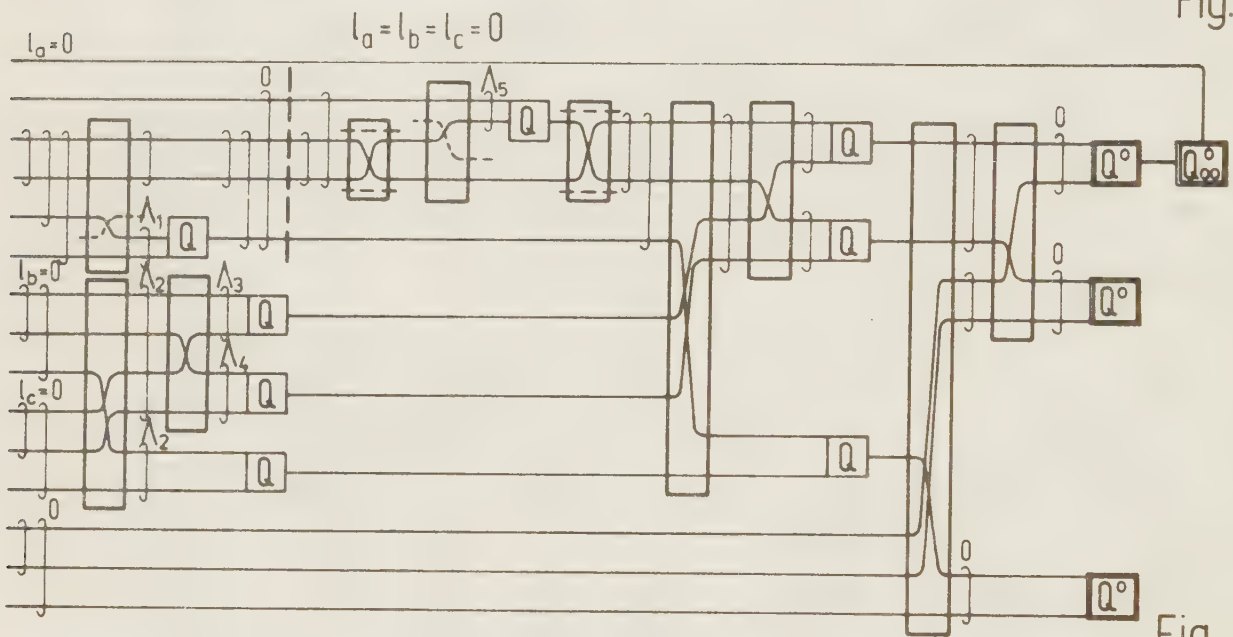


Fig. A3.7

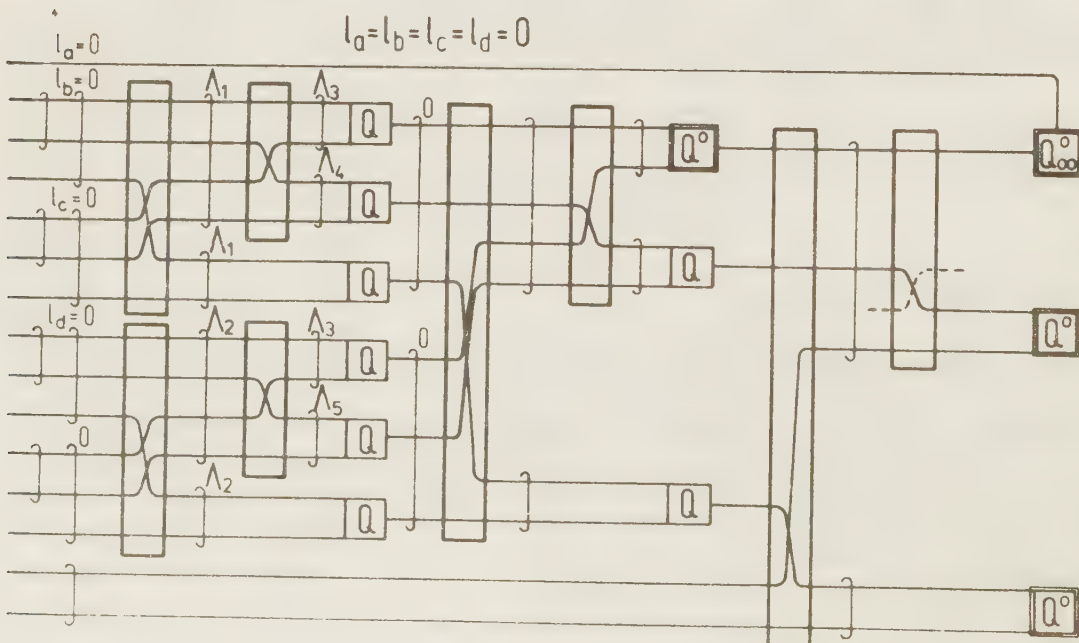


Fig. A3.8

$$\int \langle \Psi^* V \Psi \rangle = \sum_{\Lambda_1 \dots \Lambda_5} (-)^{\Lambda_5 - \Lambda_1 + \ell_8 - \lambda_3} \frac{1}{\hat{\ell}_3 \hat{\ell}_6} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{bmatrix} \lambda_3 & \ell_3 & \ell_4 \\ 0 & \ell_{cd} & \ell_{cd} \\ \lambda_3 & \Lambda_1 & I \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ \ell_4 & \ell_5 & \ell_6 \\ \Lambda_3 & \Lambda_4 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & I \\ \ell_1 & \ell_7 & \lambda_3 \\ \Lambda_5 & \ell_7 & \Lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_7 & \Lambda_5 & \Lambda_1 \\ \Lambda_3 & \Lambda_4 & \Lambda_2 \\ \ell_{10} & \ell_{11} & \ell_{12} \end{bmatrix} Q_{\ell_3 \ell_6}^{\Lambda_1} Q_{\ell_3 \ell_6}^{\Lambda_2} \times$$

(A3.12)

$$\times Q_{\Lambda_2 \ell_{12}}^{\Lambda_1} \times Q_{\ell_1 \ell_4}^{\Lambda_3} \times Q_{\ell_7 \Lambda_3}^{\ell_{10}} \times Q_{\ell_2 \ell_5}^{\Lambda_4} \times Q_{I \ell_8}^{\Lambda_5} \times$$

$$\times Q_{\Lambda_5 \Lambda_4}^{\ell_{11}} \times \delta_{J_0} \delta_{\tilde{J}_d} \delta_{\ell_{ab} I} \delta_{\lambda_1 \ell_3} \delta_{\lambda_2 \ell_6} \equiv W_6(\ell_d, \ell_{cd}, I, \ell_1 \dots \ell_{12}, \lambda_3)$$

und für $l_a = l_c = l_d = 0$ und $l_b \neq 0$:

$$\int \langle \Psi^* V \Psi \rangle = \sum_{\Lambda_1 \dots \Lambda_5} (-)^{\Lambda_5 - \Lambda_1 + \ell_2 - \lambda_1 + I + \ell_6 - \ell_{ab}} \frac{1}{\hat{\ell}_6 \hat{\ell}_9} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 & \ell_6 \\ 0 & I & I \\ \lambda_1 & \Lambda_1 & \ell_{ab} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \ell_7 & \ell_8 & \ell_9 \\ \ell_4 & \ell_5 & \ell_6 \\ \Lambda_3 & \Lambda_4 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_{ab} & 0 & \ell_{ab} \\ \ell_2 & \ell_1 & \lambda_1 \\ \Lambda_5 & \ell_1 & \Lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_1 & \Lambda_5 & \Lambda_1 \\ \Lambda_3 & \Lambda_4 & \Lambda_2 \\ \ell_{10} & \ell_{11} & \ell_{12} \end{bmatrix} Q_{\ell_3 I}^{\Lambda_1} Q_{\ell_3 \ell_6}^{\Lambda_2} \times$$

(A3.13)

$$\times Q_{\Lambda_2 \ell_{12}}^{\Lambda_1} Q_{\ell_7 \ell_4}^{\Lambda_3} Q_{\ell_1 \Lambda_3}^{\ell_{10}} Q_{\ell_8 \ell_5}^{\Lambda_4} Q_{\ell_{ab} \ell_2}^{\Lambda_5} Q_{\Lambda_5 \Lambda_4}^{\ell_{11}} \times$$

$$\times \delta_{J \ell_6} \delta_{\tilde{J} 0} \delta_{\ell_{cd} I} \delta_{\lambda_2 \ell_6} \delta_{\lambda_3 \ell_9} \equiv W_7(\ell_6, \ell_{ab}, I, \ell_1 \dots \ell_{12}, \lambda_1)$$

Wenn alle Kerndrehimpulse null sind, bekommen wir nach

Fig (A3.8) schließlich:

$$\int \langle \Psi^* V \Psi \rangle = \sum_{\Lambda_1 \dots \Lambda_5} \frac{\hat{I} \hat{\ell}_4}{\hat{\ell}_3 \hat{\ell}_6 \hat{\ell}_9 \hat{\ell}_{12}} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ \ell_4 & \ell_5 & \ell_6 \\ \Lambda_3 & \Lambda_4 & \Lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_7 & \ell_8 & \ell_9 \\ \ell_{10} & \ell_{11} & \ell_{12} \\ \Lambda_3 & \Lambda_5 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \Lambda_3 & \Lambda_4 & \Lambda_1 \\ \Lambda_3 & \Lambda_5 & \Lambda_2 \\ 0 & I & I \end{bmatrix} Q_{\Lambda_3 \ell_1}^{\ell_4} Q_{\ell_7 \ell_{10}}^{\Lambda_3} Q_{\ell_2 \ell_5}^{\Lambda_4} Q_{\Lambda_4 \Lambda_5}^I Q_{\ell_8 \ell_{11}}^{\Lambda_5} Q_{\ell_3 \ell_6}^{\Lambda_2} \times$$

(A3.14)

$$\times Q_{\ell_3 \ell_{12}}^{\Lambda_2} Q_{\Lambda_1 \Lambda_2}^I \delta_{J_0} \delta_{\tilde{J} 0} \delta_{\ell_{ab} I} \delta_{\ell_{cd} I} \delta_{\lambda_1 \ell_3} \delta_{\lambda_2 \ell_6} \delta_{\lambda_3 \ell_9} \\ \equiv W_9(I, \ell_1 \dots \ell_{12})$$

Anhang A4. Numerische Lösung gebundener Zustände

Das entscheidende Problem bei der numerischen Bestimmung der gebundenen Eigenzustände der Schrödingergleichung mit Potential ist die Lösung der Radialgleichung. Diese geht auf die Form zu bringen:

$$\psi'' - A\psi = 0 \quad (\text{A4.1})$$

Ein Strich an einer Funktion bedeutet hier Differentiation nach r . Mit vorgegebenen Startwerten wird nun vorwärts von $r = 0$ bis $r = r_{\text{match}}$ (siehe dazu Fig. (V.1)) integriert und

$$\psi_{\text{innen}}(r_{\text{match}}), \psi'_{\text{innen}}(r_{\text{match}})$$

gebildet. Mit ebenfalls gegebenen Startwerten wird anschließend rückwärts vom Abschneideradius r_{cut} (weit draußen, wo die Funktion schon stark abgefallen ist) bis r_{match} integriert und wieder

$$\psi_{\text{außen}}(r_{\text{match}}), \psi'_{\text{außen}}(r_{\text{match}})$$

ausgerechnet. Dann wird die Differenz der Quotienten

$$f = \frac{\psi'_{(i)}(r_{\text{match}})}{\psi_{(i)}(r_{\text{match}})} - \frac{\psi'_{(a)}(r_{\text{match}})}{\psi_{(a)}(r_{\text{match}})} \quad (\text{A4.2})$$

gebildet. Wo f null ist, gehen Innen- und Außenlösung und ihre Ableitungen stetig ineinander über, das heißt, diese Wellenfunktion ist Eigenfunktion des Hamiltonoperators zu der betreffenden Energie.

Praktisch geht man bei der Suche nach Eigenzuständen so vor: Man berechnet f als Funktion der Energie E und bestimmt die Nullstellen entweder graphisch oder durch ein Nullstellenprogramm, das Vorzeichenwechsel der betrachteten Funktion sucht.

Für die numerische Integration gibt es mehrere Standard-Verfahren:

1) Fox - Goodwin

Die Wellenfunktion im i -ten Punkt bestimmt sich aus Wellenfunktion und Potential am $(i-1)$ -ten und $(i-2)$ -ten Punkt sowie dem Potential am i -ten Punkt durch:

$$\psi_i = \frac{[2 + \frac{5h^2}{6} A_{i-1}] \psi_{i-1} - [1 - \frac{h^2}{12} A_{i-2}] \psi_{i-2}}{1 - \frac{h^2}{12} A_i} \quad (\text{A4.3})$$

ψ_i bedeutet i -ter Punkt der Tabelle: $\psi_i = \psi(r_i) + (i-1)h$
 h ist die Schrittweite der Integration. Die Startwerte für Innen und Außen sind gleich:

$\psi_0 = \psi_N = 0$, $\psi_1 = \psi_{N-1} = C$, C = freie, vorgegebene Konstante. Der Wert $C = 10^{-6}$ war bei allen unseren Rechnungen gut. N = Zahl der Integrationspunkte

Der lokale Abschneidefehler im n -ten Punkt geht wie $h^6 \psi^{(6)}$.

2) Noumerov und Modified Noumerov

Die beiden Verfahren Noumerov und Modified Noumerov ar-

beiten mit einer Hilfsfunktion:

$$f(r) = \psi(r) - \frac{\hbar^2}{12} A(r) \psi(r)$$

bzw.

(A4.4)

$$\psi(r) = \frac{f(r)}{1 - \frac{\hbar^2}{12} A(r)}$$

Aus f_{i-1} und f_i folgt dann :

Beim Noumerov - Verfahren:

$$f_{i+1} = \left[2 + \frac{\hbar^2 A_i}{1 - \frac{\hbar^2}{12} A_i} \right] f_i - f_{i-1} \quad (\text{A4.5})$$

und bei Modified Noumerow:

$$f_{i+1} = \left[\left(\left(\hbar^2 / 12 \right) A_i + \sqrt{3} \right)^2 - 1 \right] f_i - f_{i-1} \quad (\text{A4.6})$$

In beiden Fällen sind die Startwerte:

$f_0 = f_N = 0$ für Zustände mit Drehimpuls $l \neq 1$
und $f_0 = f_N = -0.2 \text{ C}$ für Drehimpuls 1.

$f_1 = f_{N-1} = C$. C ist wieder eine frei zu wählende kleine Konstante, etwa 10^{-6} .

Der lokale Abschneide-Fehler ist bei diesen Verfahren ebenfalls proportional $\hbar^6 \psi^{(6)}$, die Erfahrung zeigt jedoch, daß die Ergebnisse hier besser sind als bei Fox + Goodwin.

Anhang A5. Integrale über Produkte von Besselfunktionen

Wir betrachten zunächst die Lösung der Integrale (VII.5):

Demnach haben wir zu lösen:

$$\int j_L(k_v r) j_L(k_r r) r^2 dr$$

und

(A5.1)

$$\int h_L(i k_v r) j_L(k_r r) r^2 dr$$

$$= \int j_L(i k_v r) j_L(k_r r) r^2 dr + i \int n_L(i k_v r) j_L(k_r r) r^2 dr$$

Wir schreiben kompakt:

$$\int y_L(\alpha r) j_L(k r) r^2 dr$$

wo α reell ist oder rein imaginär. $y_L = j_L, n_L, h_L$

Wir multiplizieren die Bessel'sche Differentialgleichung

$$y'' + \frac{2}{z} y' + \left(1 - \frac{\ell(\ell+1)}{z^2}\right) y = 0 \quad (A5.2)$$

mit $z = \alpha r$

von links mit $r^2 j_\ell(kr)$ und bilden das Integral über

dr . Dasselbe machen wir mit $r^2 y_\ell(\alpha r)$, bilden die

Differenz und erhalten:

$$\begin{aligned} & \int r^2 j_\ell(kr) \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} y_\ell(\alpha r) + \left[\alpha^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] y_\ell(\alpha r) \right] dr \\ & - \int r^2 y_\ell(\alpha r) \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} j_\ell(kr) + \left[k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] j_\ell(kr) \right] dr \end{aligned} \quad (A5.3)$$

Die Differenz ist:

$$\int \left\{ y_e(\alpha r) \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} j_e(kr) \right) - j_e(kr) \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} y_e(\alpha r) \right) \right\} dr$$

(A5.4)

$$+ (k^2 - \alpha^2) \int j_e(kr) y_e(\alpha r) r^2 dr = 0$$

Partielle Integration führt auf:

$$y_e(\alpha r) r^2 \frac{d}{dr} j_e(kr) - j_e(kr) r^2 \frac{d}{dr} y_e(\alpha r)$$

$$- \int r^2 \left(\frac{d}{dr} j_e(kr) \right) \left(\frac{d}{dr} y_e(\alpha r) \right) dr$$

$$+ \int r^2 \left(\frac{d}{dr} y_e(\alpha r) \right) \left(\frac{d}{dr} j_e(kr) \right) dr + (k^2 - \alpha^2) \int j_e(kr) y_e(\alpha r) r^2 dr$$

so daß

$$\int j_e(kr) y_e(\alpha r) r^2 dr =$$

$$\frac{r^2}{\alpha^2 - k^2} \left\{ y_e(\alpha r) j_e'(kr) - j_e(kr) y_e'(\alpha r) \right\}$$

(A5.5)

Der Strich bedeutet Differentiation nach r . (VII.6)

verifizieren wir durch Einsetzen unter Beachtung der Randbedingung, daß bei $r = R_0$ Innen- und Außenlösung sowie deren Ableitungen gleich sind. Außerdem beachten

wir die Identität: ⁵²⁾

$$j_e'(kr) = \frac{q}{r} j_e(kr) - k j_{e+1}(kr) \quad (\text{A5.6})$$

Die Randbedingung liefert uns:

$$j_e'(k_v R_0) h_e(ik_v R_0) = j_e(k_v R_0) h_e'(ik_v R_0)$$

so daß wir schließlich (VII.6) verifizieren.

Bei der Lösung von (VII.3), dann (VII.1) und (VII.2) ⁵⁰⁾ folgen wir einer von Scheid vorgeführten Methode mit dem Residuensatz. Die Integrale (VII.3) haben die Form:

$$\int_0^{\infty} j_{k_1}(ka) j_{k_2}(kb) j_{k_3}(kc) \left\{ \begin{matrix} j_{e+1}(kd) \\ j_e(kd) \end{matrix} \right\} \frac{k^3}{k^2 - q^2} dk = J_{1,2} \quad (\text{A5.7})$$

wobei g reell oder rein imaginär ist. k_v ist bezüglich der k - Integration konstant. Da das Integral insgesamt positive Parität hat, ist:

$$J_{1,2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Integrand wie (A5.7)}$$

Wir schreiben die Besselfunktionen als Potenzreihen ⁵¹⁾

$$j_e(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(l+m)!}{m!(l-m)!} \frac{1}{(2z)^{m+1}} \cdot \left\{ i^{m-l-1} e^{iz} + i^{-(m-l-1)} e^{-iz} \right\} \quad (\text{A5.8})$$

symbolisch:

$$j_e(z) = F_e(z) + F_e^*(z)$$

mit

$$F_\ell(z) = \sum_{m=0}^{\ell} \frac{(\ell+m)!}{m!(\ell-m)!} \left(\frac{1}{2z}\right)^{m+1} i^{m-\ell-1} \frac{iz}{\ell} \quad (\text{A5.9})$$

Die Integrale $\mathcal{J}_1$ erhalten dann folgende Form:

$$\mathcal{J}_1 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (F_{\kappa_1}(ka) + F_{\kappa_1}^*(ka)) (F_{\kappa_2}(kb) + F_{\kappa_2}^*(kb)) \\ (F_{\kappa_3}(kc) + F_{\kappa_3}^*(kc)) (F_\ell(kd) + F_\ell^*(kd)) \frac{k^3}{k^2 - q^2} dk \quad (\text{A5.10})$$

ausgeführt:

$$\mathcal{J}_1 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k^3}{k^2 - q^2} \left\{ \begin{aligned} &F_{\kappa_1}(ka) F_{\kappa_2}(kb) F_{\kappa_3}(kc) F_\ell(kd) + \text{konj. Impl.} \quad (\text{I}_1) \\ &+ F_{\kappa_1}(ka) F_{\kappa_2}(kb) F_{\kappa_3}(kc) F_\ell^*(kd) + \text{konj. Impl.} \quad (\text{I}_2) \\ &+ F_{\kappa_1}(ka) F_{\kappa_2}(kb) F_{\kappa_3}^*(kc) F_\ell(kd) + \text{---} \quad (\text{I}_3) \\ &+ F_{\kappa_1}(ka) F_{\kappa_2}(kb) F_{\kappa_3}^*(kc) F_\ell^*(kd) + \text{---} \quad (\text{I}_4) \\ &+ F_{\kappa_1}(ka) F_{\kappa_2}^*(kb) F_{\kappa_3}(kc) F_\ell(kd) + \text{---} \quad (\text{I}_5) \\ &+ F_{\kappa_1}(ka) F_{\kappa_2}^*(kb) F_{\kappa_3}(kc) F_\ell^*(kd) + \text{---} \quad (\text{I}_6) \\ &+ F_{\kappa_1}(ka) F_{\kappa_2}^*(kb) F_{\kappa_3}^*(kc) F_\ell(kd) + \text{---} \quad (\text{I}_7) \\ &+ F_{\kappa_1}(ka) F_{\kappa_2}^*(kb) F_{\kappa_3}^*(kc) F_\ell^*(kd) + \text{---} \end{aligned} \right\} dk \quad (\text{I8})$$

(A5.11)

Diese 8 Integrale sind nun einzeln zu behandeln. Wir haben Pole bei $k = \pm g$ auf der reellen oder imaginären Achse, je nachdem, ob k reell oder rein imaginär ist. (s. Fig (A5.1))

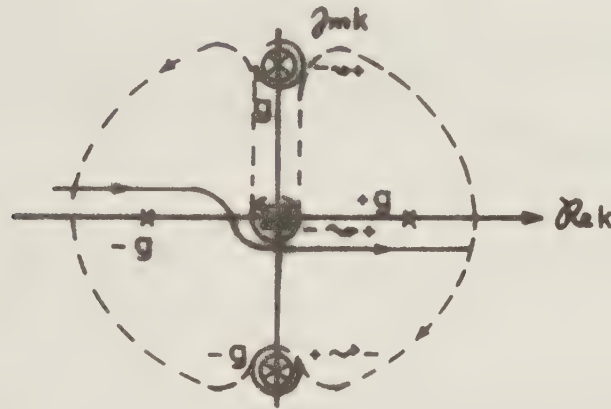


Fig. (A5.1)

Integral I_1 lautet:

$$\begin{aligned}
 I_1 = & \Theta(a+b+c+d) \left\{ \pi i g^2 F_{\kappa_1}(ga) F_{\kappa_2}(gb) F_{\kappa_3}(gc) F_{\kappa_4}(gd) \right. \\
 & - \pi i g^2 F_{\kappa_1}^*(ga) F_{\kappa_2}^*(-gb) F_{\kappa_3}^*(-gc) F_{\kappa_4}^*(-gd) \\
 & \left. + 2\pi i \operatorname{Res} \left\{ \frac{k^3}{k^2 - g^2} F_{\kappa_1}(ka) F_{\kappa_2}(kb) F_{\kappa_3}(kc) F_{\kappa_4}(kd) \right\} \right\}
 \end{aligned} \tag{A5.12}$$

Die Stellung der Faktoren eines Produkts ist beliebig, also ändere ich nichts, wenn die F 's so geordnet werden, daß $a \geq b \geq c \geq d$ ist. Nachher müssen wir nur bei der Zuordnung von $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$ aufpassen. Wir betrachten:

$$F_{\kappa_1}(ka) F_{\kappa_2}(kb) F_{\kappa_3}(kc) F_{\ell}(kd) =$$

$$= \sum_{\mu_1=0}^{\kappa_1} \sum_{\mu_2=0}^{\kappa_2} \sum_{\mu_3=0}^{\kappa_3} \sum_{\mu_4=0}^{\ell} \frac{(\kappa_1+\mu_1)! (\kappa_2+\mu_2)! (\kappa_3+\mu_3)! (\ell+\mu_4)!}{\mu_1! \mu_2! \mu_3! \mu_4! (\kappa_1-\mu_1)! (\kappa_2-\mu_2)! (\kappa_3-\mu_3)! (\ell-\mu_4)!}$$

$$\times \frac{1}{(2a)^{\mu_1+1} (2b)^{\mu_2+1} (2c)^{\mu_3+1} (2d)^{\mu_4+1}} \quad (A5.13)$$

$$\times k^{-(\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4+4)} \cdot i^{\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4-\kappa_1-\kappa_2-\kappa_3-\ell}$$

$$\times i k(a+b+c+d)$$

$$\times e$$

Berechnung des Residuums:

$$\text{Res} \{ \} =$$

$$\text{Res} \left\{ \sum_{\substack{\mu_1, \mu_2 \\ \mu_3, \mu_4}} \text{Fakultäten} \cdot i^{\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4-\kappa_1-\kappa_2-\kappa_3-\ell} \right. \\ \left. \frac{k^3}{k^2-q^2} k^{-(4+\sum \mu_i)} i k(a+b+c+d) e \right\} \quad (A5.14)$$

Wir entwickeln $\frac{1}{k^2-q^2}$ nach Potenzen von k um $k=0$ herum:

$$\frac{1}{k^2-q^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n k^n (a+b+c+d)^n}{n!}$$

Das Resium ist also:

$$\text{Res}\{ \} =$$

$$\text{Res} \left\{ \sum_{\substack{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \\ \nu, n}}^{\infty, \infty} i^{\sum_{j=1}^4 (\mu_j - \kappa_j) + n} \frac{\prod (\kappa_i + \mu_i)!}{\prod (\mu_i! (\kappa_i - \mu_i)!)} \times \right.$$

$$\times \frac{(a+b+c+d)^n}{(2a)^{\mu_1+1} (2b)^{\mu_2+1} (2c)^{\mu_3+1} (2d)^{\mu_4+1}} \quad (\text{A5.15})$$

$$\times \left(-\frac{1}{g^{2\nu+2}} \right) e^{-\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 - \mu_4 + 2\nu + n - 1}$$

nach einiger Rechnung finden wir :

$$\text{Res}\{ \} = \sum_{\substack{\mu_1, \mu_2, \mu_3 \\ \mu_4, \nu}} g^{-(2\nu+2)} (-)^{\sum \mu_i + \nu + 1} i^{-\kappa_1 - \kappa_2 - \kappa_3 - \kappa_4} \times$$

$$\times \frac{\prod [(\kappa_i + \mu_i)!]}{\prod [\mu_i! (\kappa_i - \mu_i)!]} \frac{(a+b+c+d)^{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 - 2\nu}}{(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 - 2\nu)! (2a)^{\mu_1+1} (2b)^{\mu_2+1} (2c)^{\mu_3+1} (2d)^{\mu_4+1}} \quad (\text{A5.16})$$

Die Summationsgrenzen sind:

$$\mu_i \max = \kappa_i \quad i=1,2,3 \quad \text{und } 0 \text{ f\"ur } i=4 \quad \nu_{\max} = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4)$$

Dieselbe Arbeit müssen wir uns auch mit den Integralen $I_2 \dots I_8$ machen. So erhalten wir schließlich die Lösung für (VII.3) und entsprechend (VII.1) und (VII.2).

R E F E R E N Z E N

- 1) Beiträge von G.B.Satchler und N.K.Glendenning in:
Proceedings of the International Conference on Re-
actions Between Complex Nuclei, Nashville, Tenn.,
10. - 14. Juni 1974

Beiträge von S.G.Nilsson und A.Faessler in:
Proceedings of the International Winter Meeting on
Nuclear Physics, Bormio Jan. 1976
- 2) B.Müller, R.K.Smith, W.Greiner: Proceedings of the
International School on Nuclear Physics, Predeal,
Rumänien, Sept. 1974

P.Mokler, H.K.Stein, P.Armbruster: Phys.Rev.Lett.
29 (1972) 827

J.S.Greenberg, C.K.Davis, P.Vincent: Phys.Rev.Lett.
32 (1974) 1215

B.Müller, J.Rafelski, W.Greiner: Z.Phys. 257 (1972)
62 und 187
- 3) W.Greiner: Umschau in Wissenschaft und Technik 12
(1969) 365

G.T.Seaborg: AEC - Report S-39-69 und S-7-70

B.Fricke, W.Scheid: Kerntechnik, Okt 1973 S. 431 ff

A.Sandulescu, R.Gupta, W.Scheid, W.Greiner; Phys.
Lett. 60b (1976) 225

- 4) C.Toepffer: Z.Phys. 253 (1972) 78
W.E.Frahn: Annals of Physics 72 (1972)
- 5) R.A.BrogliA, A.Winther: Physics Reports 4 (1972) 153
M.W.Morsey, C.Toepffer: Z.Phys. 263 (1973) 227
S.Landowne, C.H.Dasso, B.S.Nilsson, R.A.BrogliA,
A.Winther: Proceedings of the International Winter
Meeting on Nuclear Physics, Bormio, Jan. 1976
- 6) D.A.Bromley, J.A.Kuehner, E.Almquist: Phys.Rev.Lett.
4 (1960) 365 und 515
J.V.Maher, M.W.Sachs, R.H.Siemssen, A.Weidinger,
D.A.Bromley: Phys.Rev. 188 (1969) 1665
W.Reilly, R.Wieland, A.Gobbi, M.W.Sachs, J.V.Maher,
R.H.Siemssen, D.Mingay, D.A.Bromley: Il Nuovo Cimento
13A (1973) 897
M.L.Halbert, C.B.Fulmer, S.Raman, M.J.Saltmarsh,
A.H.Snell, P.H.Stelson: Bull.Am.Phys.Soc. II 18
(1973) 1387
- 7) Übersichtsartikel von R.Stokstad in: Proceedings
of the Symposium on Heavy-Ion Transfer Reactions,
Argonne, 1973
- 8) R.W.Shaw jr., J.C.Norman, R.Vandenbosch, C.J.Bishop:
Phys.Rev. 184 (1969) 1040

K.S.Low, T.Tamura: Phys.Lett. 40b (1972) 32

J.P.Bondorf: Nucl.Phys. A202 (1973) 1

- 9) K.Jansen, W.Scheid, W.Greiner: Phys.Lett. 47b (1973) 5

K.Jansen: Diplomarbeit, Frankfurt 1974

- 10) W.Scheid, W.Greiner, R.Lemmer: Phys.Rev.Lett. 25
(1970) 176

H.J.Fink, W.Scheid, W.Greiner: Nucl.Phys. A188 (1972)
259

- 11) P.P.Singh, D.Sink, P.Schwandt, R.E.Malmin, R.H.
Siemssen; Proceedings of the Symposium on Heavy-Ion
Scattering, Argonne 1971 p.195 ff

- 12) H.H.Rossner, G.Hinderer, A.Weidinger, K.A.Eberhard;
Nucl.Phys. A218 (1974) 606

- 13) K.Erb (Yale) private Mitteilung

- 14) A.Weidinger: Proceedings of the International Winter
Meeting on Nuclear Physics, Villars 1973

- 15) Übersichtsartikel: K.Bethge: Ann.Rev.Nucl.Sci. 20
(1970) 255

Proceedings: Symposium on Four Nucleon Correlations
and Alpha Rotator Structure, Marburg 1972 sowie
Symposium on Heavy-Ion Transfer Reactions, Argonne
1973

- 16) R.Bock, H.Yoshida: Nucl.Phys. A109 (1972) 177
A.Arima, R.A.Brogliu, M.Ichimura, K.Schäfer: Nucl.
Phys. A215 (1973) 109
H.Yoshida: Nucl.Phys. A257 (1976) 348
- 17) P.J.A.Buttler, L.J.B.Goldfarb: Nucl.Phys. 78 (1966)
409 sowie A115 (1968) 461 und A176 (1971) 299
- 18) G.Delic, D.Kurath: Lawrence Rad. Lab. Berkeley 1976
LBL - 4364 submitted to Phys.Rev. C
- 19) T.Tamura, D.R.Bes, R.A.Brogliu, S.Landowne; Phys.
Rev.Lett. 25 (1970) 1507
K.S.Low, T.Tamura: Proceedings of the Symposium on
Heavy-Ion Transfer Reactions, Argonne 1973 p.655 ff
- 20) R.J.Ascuitto, N.K.Glendenning: Nucl.Phys. A188 (1972)
185
- 21) B.Imanishi: Nihon University, Kanda-Surugadai, Tokyo,
preprint NUP - A - 72 - 14
- 22) J.A.Wheeler: Phys.Rev. 52 (1937) 1083 und 1107
- 23) O.Krause, W.Scheid, W.Greiner: Nukleonika 19 (1974) 267
- 24) H.Friedrich: Dissertation, Münster 1974
- 25) J.Y.Park, W.Scheid, W.Greiner: Phys.Rev. C6 (1972) 1565
- 26) M.Danos: Ann.Phys. 63 (1971) 319

D.R.Lehman; J.S.O'Connell: NBS - Monograph 136 (1973)

M.Danos, V.Gillet: NBS - preprint D Ph - T / 74 / 66
Juli 1974, To be published in NBS - Reports

- 27) A.R.Edmonds: Drehimpulse in der Quantenmechanik
B.I. - Hochschultaschenbücher Bd. 53/53a
- 28) M.A.Melkanoff, T.Sawada, J.Raynal: Methods in Computational Physics vol. 6, Academic Press, New York 1967
- 29) M.Krell, T.E.O.Ericson, Journal of Computational Physics 3 (1968) 202
- 30) F.Ajzenberg-Selove: Nucl.Phys. A166 (1971) 1
- 31) H.Horiuchi, K.Ikeda, Y.Suzuki: Suppl.Prog.Theor.Phys. 52 (1972) 89
- 32) P.Chevallier, F.Scheibling, G.Goldring, I.Plessner, M.W.Sachs: Phys.Rev.160 (1967) 827
- 33) Y.Suzuki, H.Horiuchi, K.Ikeda: Prog.Theor.Phys. 47 (1972) 1517
- 34) F.Ajzenberg-Selove: Nucl Phys. A190 (1972) 1
- 35) A.B.Panagiotou, H.E.Gove, S.Harar: Phys.Rev. C5 (1972) 1995
- 36) J.Hiura, F.Nemoto, H.Bando: Suppl.Prog.Theor.Phys. 52 (1972) 173

- 37) A.H.Wapstra: Nucl.Data A1 (1965) 21
- 38) W.Scheid, W.Greiner: Z.Phys. 226 (1969) 364
- 39) T.Morovic, W.Greiner: Z.Naturforsch. (wird 1976
erscheinen)
- 40) B.Fink, C.Toepffer: Phys.Lett. 45b (1973) 175
- 41) B.Tatischeff, I.Brissaud: Nucl.Phys. A155 (1970) 89
- 42) N.Baron, R.F.Leonard, W.M.Steward: Phys.Rev. C4
(1971) 1159
- 43) F.P.Brady, J.A.Jungerman, J.C.Young: Nucl.Phys. A98
(1967) 241
- 44) P.Gaillard, R.Bouché, L.Feuvrais, M.Gaillard,
A.Guichard, M.Gusakow, I.L.Leonhardt, I.R.Pizzi:
Nucl.Phys. A131 (1969) 353
- 45) G.Helling, W.Scheid, W.Greiner: Phys.Lett. 36b (1971)
64
- 46) N.K.Glendenning, M.A.Nagarajan: preprint, Lawrence
Rad. Lab., Berkeley, März 1974 LBL - 2378
- 47) H.Späth: Spline - Algorithmen zur Konstruktion
glatter Kurven und Flächen Verlag R. Oldenbourg
München 1973
- 48) S.R.Cotanch: Univ. of Pittsburgh, Penn. 15260
preprint 1976

- 49) J.Raynal: Commissariat à l'Energie Atomique CEN -
Saclay report no. D Ph - T / 71 - 48 (1971)
- 50) W.Scheid: private Mitteilung
- 51) M.Abramowitz, I.A.Stegun: Handbook of Mathematical
Functions, Dover Publ. Inc., 1965
- 52) L.Schiff: Quantum Mechanics, Mc. Graw Hill, 1969

Verzeichnis der Abbildungen

- s.3: Fig. (I.1) $^{16}\text{O} - ^{16}\text{O}$ - Anregungsfunktion nach Ref. 6)
- s.4: Fig. (I.2) Erläuterung zum Doppelresonanzmechanismus nach Ref. 10)
- s.6: Fig. (I.3) Anregungsfunktionen für α - Transfer zum Target und zum Projektil aus Ref. 12)
- s.7: Fig. (I.4) Doppelkoinzidenzmessung der Reaktion $^{16}\text{O} (^{16}\text{O} , ^{12}\text{C}) ^{20}\text{Ne}$ aus Ref. 13)
- s.8: Fig. (I.5) Anregungsfunktionen für $^{16}\text{O} (^{16}\text{O} , ^{12}\text{C}) ^{20}\text{Ne}$ aus Ref. 13)
- s.9: Fig. (I.6) Winkelverteilungen dazu
- s.11: Fig. (I.7) Vergleich von energiegemittelten Transferquerschnitten mit statistischen Vorhersagen. (Ref. 13))
- s.29: Fig. (III.1) Die Geometrie des $^{16}\text{O} - ^{16}\text{O}$ - Systems im $^{12}\text{C} +$ und α - Cluster - Modell.
- s.30: Fig. (III.2) Die beiden von uns betrachteten Fragmentationen im Cluster - Modell.
- s.43: Fig. (V.1) Zur Ermittlung des Match - Radius bei der numerischen Integration der gebundenen Cluster - Cluster - Relativwellenfunktionen.

- s.44: Fig. (V.3 und 4) Darstellung der $^{12}\text{C} - \alpha$ - Konfiguration und der 4 - α - Kette für ^{16}O .
- s.45: Fig. (V.2) Zustände des ^{16}O - Kernes, geordnet nach ihrem Charakter.
- s.47: Fig. (V.7) Geometrie des ^{20}Ne - Kernes für Bestimmung des Quadrupolmomentes.
- s.48: Fig. (V.5) $^{12}\text{C} - \alpha$ - Potential und gebundene Cluster - Cluster - Relativfunktion zur Darstellung des ^{16}O - Grundzustandes.
- s.49: Fig. (V.6) ^{20}Ne - Zustände nach Banden sortiert.
- s.51: Fig. (V.8) $^{16}\text{O} - \alpha$ - Potentiale und gebundene Cluster - Cluster - Relativfunktionen zur Darstellung des Grundzustandes sowie des tiefsten 2^+ - und 4^+ .
- s.56: Fig. (VI.1) Realteile verschiedener optischer Potentiale für $^{12}\text{C} - \alpha$ - Streuung aus der Literatur.
- s.57: Fig. (VI.2) Imaginärteile von optischen Potentialen für $^{12}\text{C} - \alpha$ - Streuung aus der Literatur.
- s.60: Fig. (VI.3) Die von uns gewählten Cluster - Cluster - Streupotentiale für $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$ - , $^{12}\text{C} - \alpha$ - und $\alpha - \alpha$ - Streuung.
- s.69: Fig. (VIII.1) Vergleich zwischen exakter Polynom-
anpassung und Least - Square - Fit bei der Be-

rechnung der Fourier - Koeffizienten der gebundenen Cluster - Cluster - Relativfunktionen.

- s.73: Fig. (VIII.2) Anschauliches Beispiel für die Güte der Fourier - Entwicklung: Vergleich der aus den Koeffizienten reproduzierten Wellenfunktion mit der ursprünglichen.
- s.75: Fig. (VIII.3) Zweidimensionale Darstellung des Fourier - Koeffizienten $g_{000}^0(r, r', 0)$ für die ^{16}O - Wellenfunktion.
- s.76: Fig. (VIII.4) Der Fourier - Koeffizient $g_{440}^0(r, r', 0)$ für ^{16}O .
- s.77: Fig. (VIII.5) $g_{000}^0(r, r', 0)$ für die ^{20}Ne - Grundzustandsfunktion.
- s.78: Fig. (VIII.6) $g_{440}^0(r, r', 0)$ für den ^{20}Ne - Grundzustand.
- s.84: Fig. (IX.1) Der Non - Orthogonality - Term für $^{16}\text{O} - ^{16}\text{O}$ - Streuung. $I = 0, 2, 4$
- s.85: Fig. (IX.2) Der Non - Orthogonality - Term für $^{16}\text{O} - ^{16}\text{O}$ - Streuung. $I = 6, 8, 10$
- s.104: Fig. (A2.1) Schema der Umkopplung von vier Drehimpulsen.
- s.105: Fig. (A2.2) Schema für die Umkopplung zweier Drehimpulse.

- s.106: Fig. (A2.3) Umkopplungsschema für die ^{16}O -
 ^{16}O - Kanalwellenfunktion.
- s.109: Fig. (A2.4) Schema für die Umkopplung der ^{20}Ne -
 ^{12}C - Kanalwellenfunktion.
- s.112: Fig. (A3.1) Allgemeines Kopplungsschema für die
Winkelintegration der Überlappintegrale.
- s.114: Fig. (A3.2 bis 4) Kopplungsschemata für die
Winkelintegration der bei unseren Rechnungen auf-
tauchenden Überlappintegrale.
- s.116: Fig. (A3.5) Allgemeines Kopplungsschema für die
Winkelintegration der Matrixelemente mit skala-
ren Potentialen.
- s.118: Fig. (A3.6 bis 8) Kopplungsschemata für die
Winkelintegration der bei unseren Rechnungen auf-
tauchenden Matrixelemente mit skalaren Potentialen.
- s.127: Fig. (A5.1) Die Integrationswege bei der Resi-
duumsintegration zur analytischen Lösung der
Integrale über Produkte von Besselfunktionen.

Danksagung

Meinen verehrten Lehrern, Herrn Prof. Dr. W. Greiner und Herrn Prof. Dr. W. Scheid, gebührt großer Dank für die Anregung zu dieser Arbeit und tatkräftige Unterstützung durch viele Diskussionen und Ratschläge. Dank gilt auch vielen Institutskollegen, unter denen Herr Dr. H.-J. Fink hervorzuheben ist, für ihre Hilfe bei mannigfaltigen Detailproblemen. Besondere Anerkennung hat meine liebe Frau Jutta verdient, die durch ihr großes Verständnis den Fortgang der Arbeit gefördert hat und an der Fertigstellung des Manuskriptes maßgeblich mitwirkte. Dem Hochschulrechenzentrum Frankfurt und der Gesellschaft für Schwerionenforschung in Darmstadt danke ich für die zur Verfügung gestellte Rechenzeit, Frau Utschig für die Anfertigung vieler Abbildungen und nicht zuletzt Herrn Brose für die Druckarbeit.

L E B E N S L A U F

Am 10. Mai 1948 wurde ich - Olaf Christian Krause - in Hersbruck/Bay. geboren. Seit 1950 lebe ich in Frankfurt. Hier besuchte ich von 1954 bis 1958 die Montessori - Schule und von 1958 bis 1966 das Lessing - Gymnasium, wo ich im November 1966 das Abitur ablegte. Seit dem Wintersemester 1966/67 studiere ich Physik an der Universität Frankfurt/M. Im Januar 1969 bestand ich die Diplom - Vorprüfung für Physiker mit 'sehr gut' . Seit Herbst 1969 bin ich am Institut für Theoretische Physik bei Prof. Dr. W.Greiner, wo ich im Nov. 1971 das Diplom erwarb. Seit Mai 1972 bekleide ich eine Stelle als wissenschaftlicher Mitarbeiter am gleichen Institut.

Meine akademischen Lehrer waren:

Prof. Dr. W. Greiner, Prof. Dr. W. Scheid, Prof. Dr. C. Toepffer, Prof. Dr. M.G. Huber, Prof. Dr. D. Drechsel, Prof. Dr. H. Bilz, Prof. Dr. G. Süßmann, Prof. Dr. E. Schopper, Prof. Dr. W. Martienssen, Prof. Dr. Queisser, Prof. Dr. H. Dänzer, Prof. Dr. H. Müser, Prof. Dr. W. Gebhardt, Prof. Dr. W. Gleissberg, Prof. Dr. W. Lohmann, Prof. Dr. P. Royen, Prof. Dr. K. Hensen, Prof. Dr. F. Stummel, Dr. H. Heineken, Prof. Dr. G. Köthe.

